3.5 Meer exponentiële functies

Inleiding

De standaardfunctie voor alle exponentiële functies is $f(x) = g^x$ met $g > 0$. Alle andere exponentiële functies kunnen uit f ontstaan door verschuiven en/of herschalen. Ze hebben allemaal de vorm $y = b \cdot g^x + d$. Je zult zien dat deze exponentiële functies wel degelijk nulpunten kunnen hebben...

Je leert in dit onderwerp

- werken met verschuiving en/of herschaling van exponentiële functies;
- de karakteristieken van deze exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met deze exponentiële functies oplossen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Laat zien dat de volgende functies kunnen worden geschreven in de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

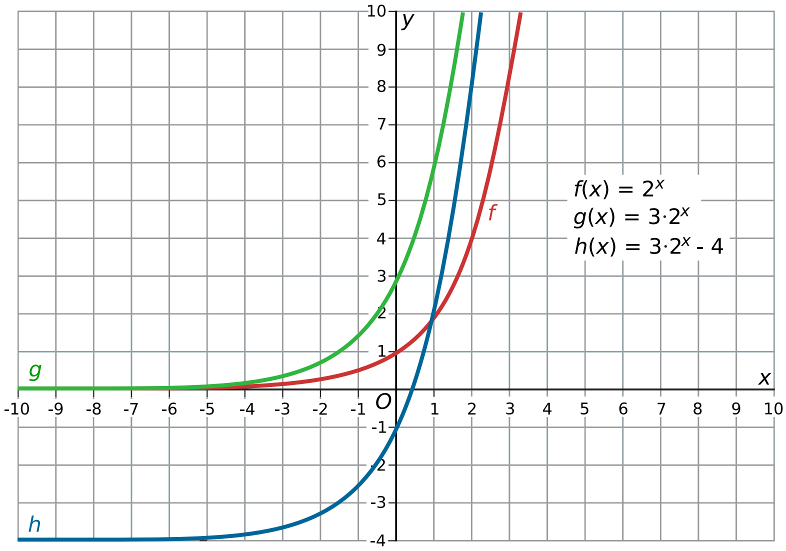
a $y_1 = 1 - 3 \cdot 0{,}5^x$

b $y_2 = -3 \cdot 0{,}5^{2x} - 4$

Uitleg

Bekijk de applet: Exponentiële functies

De standaardfunctie van alle exponentiële functies is $y = g^x$ met $g > 0$. Je ziet de grafiek met $g = 2$.



Figuur 1

Alle functies die uit $y = 2^x$ door herschalen of verschuiven kunnen ontstaan, zijn van de vorm $y = b \cdot 2^x + d$:

- $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = 0$ te nemen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door herschalen in de y-richting met factor 3 (alle y-waarden maal 3).
- $f(x) = 3 \cdot 2^x - 4$ ontstaat door $b = 3$, $g = 2$ en $d = -4$ te nemen. De grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door herschalen in de y-richting met factor 3 en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y-richting te verschuiven (alle y-waarden min 4).
- $f(x) = 3 \cdot 2^{x-1} - 4$ wordt herschreven tot $f(x) = 3 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} - 4 = 1{,}5 \cdot 2^x - 4$. $f(x)$ ontstaat door $b = 1{,}5$, $g = 2$ en $d = -4$ te nemen. En de grafiek ontstaat uit die van $y = 2^x$ door herschalen in de y-richting met factor 1,5 en vervolgens de grafiek -4 eenheden in de y-richting te verschuiven (alle y-waarden eerst maal 1,5 en dan min 4).

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Het gaat daar over exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

a Neem $b = 3$, $g = 2$ en $d = 1$. Welk functievoorschrift $f_1(x)$ krijg je? Door welke verschuiving en/of herschaling in de y-richting ontstaat de grafiek van f_1 uit die van $y = 2^x$?

b Neem $b = 3$, $g = \frac{1}{2}$ en $d = -1$. Welk functievoorschrift $f_2(x)$ krijg je? Uit welke basisfunctie kan de grafiek van f_2 door verschuiving en/of herschaling in de y-richting ontstaan? Welke verschuiving en/of herschaling in de y-richting moet je dan toepassen?

c Neem $b = -10$, $g = 1{,}5$ en $d = 100$. Welk functievoorschrift $f_3(x)$ krijg je? Bij welke vensterinstellingen krijg je alle karakteristieken van de grafiek van f_3 goed in beeld?

Opgave 2

Bekijk de functie met voorschrift $f(x) = 6 \cdot 2^{-x-1} - 12$

a Herleid het functievoorschrift tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$.

b Uit welke basisfunctie kan de grafiek van f door verschuiving en/of herschaling in de y-richting ontstaan? Welke verschuiving en/of herschaling in de y-richting moet je dan toepassen?

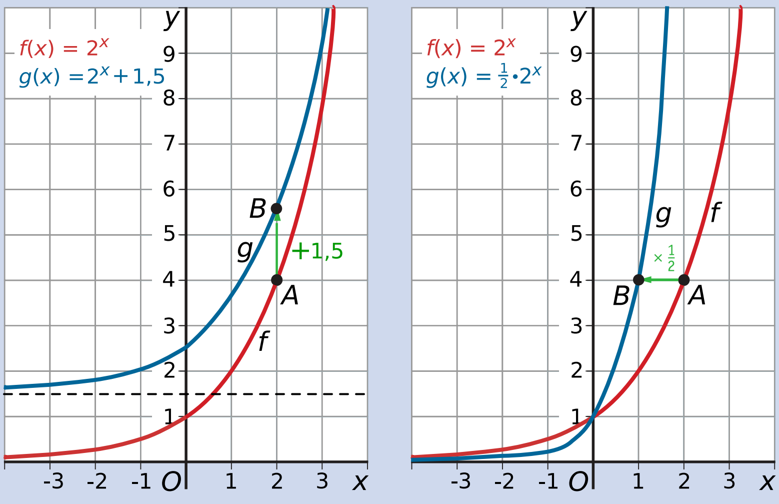
c Bereken met behulp van de grafische rekenmachine het nulpunt van de grafiek van f.

d Dit nulpunt had je ook wel algebraïsch kunnen vinden. Laat zien hoe.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Exponentiële functies



Figuur 2

Elke **exponentiële functie** heeft een functievoorschrift dat kan worden geschreven in de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.
Hierbij moet je soms gebruikmaken van de rekenregels voor machten. De grafiek van f is te tekenen door op die van $y = g^x$ de volgende **verschuiving** en **herschaling** in de y-richting toe te passen:

- herschalen in de y-richting met factor b;
- verschuiven in de y-richting met d eenheden.

De grafiek van f nadert dan voor grote of kleine x de lijn $y = d$. Dit is de **horizontale asymptoot**. Het eventuele nulpunt vind je door $b \cdot g^x + d = 0$ op te lossen. Vaak heb je daarvoor de rekenmachine nodig, maar in sommige situaties kun je dit ook algebraïsch oplossen.

Een exponentiële vergelijking/ongelijkheid kun je algebraïsch oplossen door de vergelijking aan beide zijden van het isgelijkteken als macht van hetzelfde getal te schrijven en de eigenschappen van machten te gebruiken. De ongelijkheid los je vervolgens op met behulp van de grafische rekenmachine of de karakteristieken van exponentiële grafieken.

Voorbeeld 1

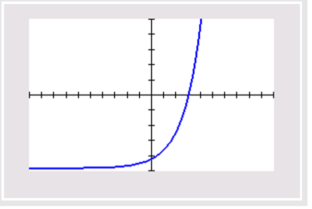
Gegeven is de functie f met voorschrift $f(x) = 60 \cdot 2^x - 480$.
Breng de grafiek in beeld met de grafische rekenmachine en bepaal welke waarde $f(x)$ nadert voor kleine waarden van x.

Antwoord

De grafiek van f kan ontstaan uit die van $y = 2^x$ door

- herschaling in de y-richting met factor 60;
- verschuiving in de y-richting over -480 eenheden (dus naar beneden schuiven).

$f(x)$ nadert daarom voor kleine waarden van x tot -480. De horizontale asymptoot is $y = -480$. Bij een venster van $-10 \leq x \leq 10$ bij $-500 \leq y \leq 500$ komt de grafiek goed in beeld.



Figuur 3

Opgave 3

Bekijk de functie uit **Voorbeeld 1**.

a Plot zelf de grafiek van f en bepaal het nulpunt.

b Bereken algebraïsch het nulpunt van f

Opgave 4

Bestudeer eerst **Voorbeeld 1**.

Bekijk de grafieken van: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $g(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ en $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5$.

a Hoe kun je de grafiek van g door herschalen van de y-as en/of verschuiven laten ontstaan uit die van f?

b Hoe kun je de grafiek van h krijgen door herschalen van de y-as en/of verschuiven van de grafiek van f?

c Tot welke waarde nadert $h(x)$ als x groot wordt?

d Welke waarden kan $h(x)$ aannemen?

e Vereenvoudig de vergelijking $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 = 10$ en los hem daarna op in drie decimalen nauwkeurig.

f Los op in drie decimalen nauwkeurig: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 5 > 10$.

Voorbeeld 2

Gegeven is de functie g met voorschrift $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1}$.
Laat zien hoe deze functie door herschalen in de y-richting en/of verschuiven kan ontstaan uit een basisfunctie van de vorm $y = 0{,}5^x$ en bereken algebraïsch het nulpunt van g.

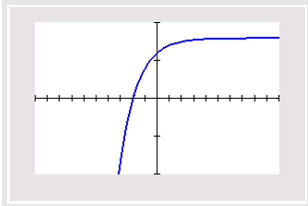
Antwoord

Eerst herleiden: $g(x) = 16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = -2 \cdot 2^{-x} \cdot 2^1 + 16 = -4 \cdot \left(2^{-1}\right)^x + 16 = -4 \cdot 0{,}5^x + 16$

De grafiek van de functie $g(x) = -4{\cdot}0{,}5^x{+}16$ kan ontstaan door vervorming van $y = 0{,}5^x$:

- herschaling in de y-richting met factor -4;
- verschuiving in de y-richting van 16 eenheden.

Voor het nulpunt moet je oplossen $16 - 2 \cdot 2^{-x+1} = 0$.
Dit kun je schrijven als $2 \cdot 2^{-x+1} = 16$ en dus als $2^{-x+1} = 8$.
Hier maak je van $2^{-x+1} = 2^3$ en dus moet $-x + 1 = 3$, zodat $x = -2$.



Figuur 4

Opgave 5

De grafiek van de functie $f(x) = 2 \cdot 2^{x+1} - 1$ kun je door herschalen en verschuiven in de y-richting uit de grafiek van de functie $g(x) = 2^x$ laten ontstaan.

a Je kunt het functievoorschrift van f herleiden tot $f(x) = 4 \cdot 2^x - 1$. Laat zien hoe dat in zijn werk gaat.

b Beschrijf nu hoe je door herschalen en verschuiven de grafiek van f kunt laten ontstaan uit die van g.

c Het punt $(0,1)$ op de grafiek van g wordt na het herschalen en verschuiven in de y-richting een punt op de grafiek van f. Bereken de coördinaten van dit punt.

d Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f?

e Bereken algebraïsch het nulpunt van de grafiek van f.

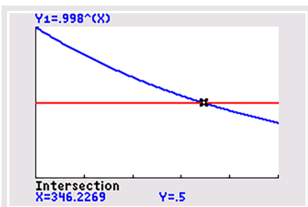
Voorbeeld 3

Een kop hete koffie komt uit een automaat. De koffie koelt af tot kamertemperatuur. De afkoeling gaat in het begin snel. Naarmate het temperatuurverschil tussen koffie en omgeving kleiner wordt, gaat de afkoeling trager. De temperatuur hangt af van de tijd waarin de koffie afkoelt. De functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$ beschrijft de temperatuur van de koffie in een omgeving van 20 °C. Hierin is t de tijd in seconden nadat de koffie uit de automaat komt.
De meeste mensen vinden koffie niet lekker als de temperatuur is gedaald tot beneden de 50 °C. Na hoeveel seconden is dat het geval?

Antwoord

Op $t = 0$ is de temparatuur $K(0) = 80$ °C. De temperatuur daalt langzaam richting de 20 °C. De vergelijking $60 \cdot 0{,}998^t + 20 = 50$ kun je met de grafische rekenmachine oplossen, je kunt er ook eerst $0{,}998^t = 0{,}5$ van maken. Ga na, dat je vindt: $t \approx 346$.

Conclusie: na ongeveer 346 seconden (5 minuten en 46 seconden) is de koffie voor de meeste mensen niet meer lekker.



Figuur 5

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** zie je de functie $K(t) = 60 \cdot 0{,}998^t + 20$, waarin t de tijd in seconden is nadat de koffie uit de automaat komt en K de temperatuur in °C .

a Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur daalt?

b Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K en wat betekent dat?

c Na hoeveel seconden heeft de koffie een temperatuur van 70 °C?

Opgave 7

Een thermoskan wordt 's morgens om 8:00 uur gevuld met koffie van 80 °C. De koffie in de thermoskan koelt af volgens de formule: $T(t) = 20 + 60 \cdot 0{,}83^t$ Hierin is T de temperatuur in graden Celsius en t het aantal uren na 8:00 uur.

a Ga ervan uit dat de koffie niet meer lekker is als de temperatuur beneden de 50 °C komt. Tot hoe laat is de koffie te drinken? Bereken dit tot op een kwartier nauwkeurig.

b Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de koffie bij het vullen van de thermoskan een temperatuur had van 80 °C?

c Hoe kun je aan het functievoorschrift zien dat de temperatuur van de koffie daalt?

d Hoelang duurt het voor de koffie een temperatuur bereikt van 21 °C?

e Wat is de uiteindelijke temperatuur van de koffie?

f De koffie staat in een woonkamer. Kun je aan het functievoorschrift van $T(t)$ zien wat de temperatuur is van de woonkamer?

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{6} \cdot 5^x + 340$.

a Hoe ontstaat de grafiek van f uit die de grafiek van $y = 5^x$?

b Plot de grafiek van f. Welke vensterinstellingen gebruik je?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van f?

Opgave 9

Los de vergelijkingen en ongelijkheden op. Vereenvoudig eerst zo ver mogelijk en geef daarna de oplossing in twee decimalen nauwkeurig.

a $5^x = 10$

b $5^x \leq 10$

c $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 = 2$

d $5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 8 < 2$

Opgave 10

Los algebraïsch op als dat mogelijk is. Geef anders een benadering met twee cijfers achter de komma.

a $4 \cdot 0{,}5^x - 1 < 0$

b $2 \cdot 2^{-x+1} - 1 > 0$

c $3{,}5^{x+50} - 0{,}5 > 3$

d $3^{x-4} < \frac{1}{9}\sqrt{3}$

Opgave 11

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule $A(t) = 540 - 540 \cdot 0{,}95^t$ geeft de hoeveelheid $A(t)$ in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed aanwezig is.

a Hoe zie je aan de formule dat de grafiek van $A(t)$ stijgend is?

b Hoeveel mg van het medicijn zal er uiteindelijk in het bloed zitten?

c Na hoeveel minuten (in gehelen) is 75% van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen?

Opgave 12

Gegeven zijn de functies $f(x) = 2^{x-2} - 3$ en $g(x) = 4 \cdot 0{,}5^{x+3} - 1$.

a Herleid beide functievoorschriften tot de vorm $y = b \cdot g^x + d$. Hoe ontstaan de grafieken van f en g door herschalen en/of verschuiven in de y-richting uit grafieken van bijpassende basisfuncties?

b Los algebraïsch op: $f(x) = -2\frac{7}{8}$.

c Los op: $g(x) > 1{,}5$. Rond het antwoord af op twee decimalen.

d Welke waarden neemt $g(x)$ aan voor $x \leq -2$?

Toepassen

Opgave 13: Dubbelvouwen

De dikte van een A4-tje is ongeveer 0,05 millimeter dik. In de volksmond wordt gezegd dat je één A4-tje niet zeven keer kunt dubbelvouwen.

a Bereken hoe dik je A4-papier wordt als je het zeven keer dubbel zou vouwen.

b De straal van de aarde is ongeveer 6365 km. Als je in theorie een vel papier met een dikte van 0,05 mm oneindig vaak dubbel zou kunnen vouwen, hoe vaak moet je dan vouwen om de diameter van de aarde te passeren?

De St. Mark's School in Southborough, Massachusetts, heeft met toiletpapier het wereldrecord dubbelvouwen in handen, met maar liefst dertien keer dubbelvouwen. Het eindresultaat was een pakket papier met een lengte van 4 meter en een breedte van 1 velletje toiletpapier. De afmeting van een velletje toiletpapier zijn ongeveer 20 bij 10 cm.

c Bereken de oorspronkelijke oppervlakte van het toiletpapier. Hoeveel velletjes toiletpapier hebben ze gebruikt?

Testen

Opgave 14

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3^x$ en $g(x) = 5 \cdot 3^x - 10$.

a Hoe ontstaat de grafiek van g uit die van f?

b Welke lijn is de asymptoot van de grafiek van g?

c Los op: $g(x) \geq 100$. Rond af op één decimaal.

Opgave 15

Los de volgende ongelijkheden algebraïsch op.

a $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$

b $2 \cdot 5^{2x} > 250$

c $2^{-x+2} < 2\sqrt{2}$

Opgave 16

Gegeven is de functie $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.

a Herleid functie f tot de vorm $f(x) = b \cdot g^x + d$.

b Hoe ontstaat de grafiek van f door herschalen in de y-richting of verschuiven uit de grafiek van $y = b \cdot g^x$?

c Welke asymptoot heeft de grafiek van f?

d Los algebraïsch op: $f(x) = 42$.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.