3.4 Exponentiële functies

Inleiding

De formules die je typisch bij exponentiële groei tegenkomt zijn voorbeelden van exponentiële functies. Je gaat daarom nu dit type functies nader bestuderen. In plaats van 'groeifactor' zal nu vaak 'grondtal' worden gezegd, nog steeds is dit grondtal een positief getal.

Je leert in dit onderwerp

- wat een exponentiële functie is;
- de karakteristieken van exponentiële functies bepalen;
- vergelijkingen en ongelijkheden met exponentiële functies oplossen;
- opstellen van een exponentiële functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$.

Voorkennis

- werken met formules voor exponentiële groei en afname;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- werken met functies en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van de hoeveelheid bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 600 \cdot 2^t$ met t in uren.

a Schets of plot de grafiek. Welke snijpunten met de assen heeft deze grafiek?

b Zijn er extremen?

c Zijn er asymptoten?

Uitleg

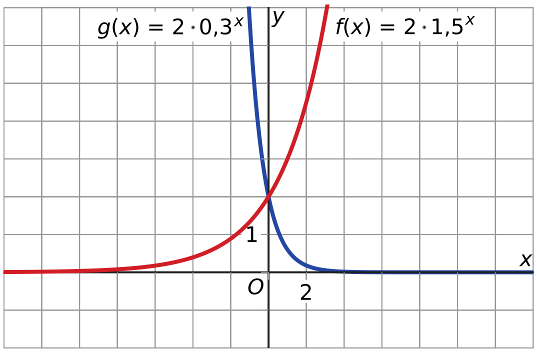
Bekijk de applet: Exponentiële functies

Functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ worden exponentiële functies genoemd. Voor positieve waarden van b is de grafiek bij de functie:

- stijgend als $g > 1$
- constant als $g = 1$
- dalend als $0 < g < 1$

Voor functies van de vorm $f(x) = g^x$ geldt ook:

- er zijn geen minima of maxima, want $f(x)$ wordt steeds groter/kleiner of blijft constant
- er zijn geen nulpunten, $f(x)$ wordt nooit 0
- $y = 0$ is een horizontale asymptoot



Figuur 1

Dat er geen nulpunten zijn, maar wel een asymptoot kun je beredeneren. Dan bedenk je dat door vermenigvuldigen met een getal dat groter is dan 1, elk positief getal alleen maar groter kan worden. Neemt x toe, dan wordt $f(x)$ dus groter. Neemt x af, dan wordt $f(x)$ kleiner, maar nooit negatief of 0. Vandaar dat er geen nulpunt is, maar wel een asymptoot. Een vergelijkbare redenering geldt voor $0 < g < 1$. Bedenk zelf wat er geldt bij een negatieve b.

Om een ongelijkheid op te lossen gebruik je de grafische rekenmachine. Bijvoorbeeld: $1{,}5^x > 8$.
Eerst los je de gelijkheid $1{,}5^x = 8$ op. Met de grafische rekenmachine vind je $x \approx 5{,}13$.
Omdat de groeifactor 1,5 is weet je dat de grafiek stijgt als x toeneemt.
De oplossing van de ongelijkheid is op één decimaal nauwkeurig $x > 5{,}1$

Opgave 1

In de **Uitleg** kun je met de applet grafieken van functies van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ bekijken.

a Neem $b = 1$ en $g = 2$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

b Neem $b = 1$ en $g = 3$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

c Neem $b = 1$ en $g = 1$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Waarom komt deze grafiek niet steeds dichter in de buurt van de x-as?

d Neem $b = 1$ en $g = 0{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

e Neem $b = 2$ en $g = 1{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

f Neem $b = -2$ en $g = 1{,}5$. Welk functievoorschrift krijg je? Wordt $f(x)$ ooit 0? Bij welke lijn komt de grafiek steeds dichter in de buurt? Is de grafiek stijgend of dalend?

Opgave 2

Welke eigenschappen heeft een functie van de vorm $f(x) = b \cdot g^x$ als $b < 0$? Maak ook nu weer verschil tussen $g > 1$, $g = 1$ en $0 < g < 1$.

Theorie en voorbeelden

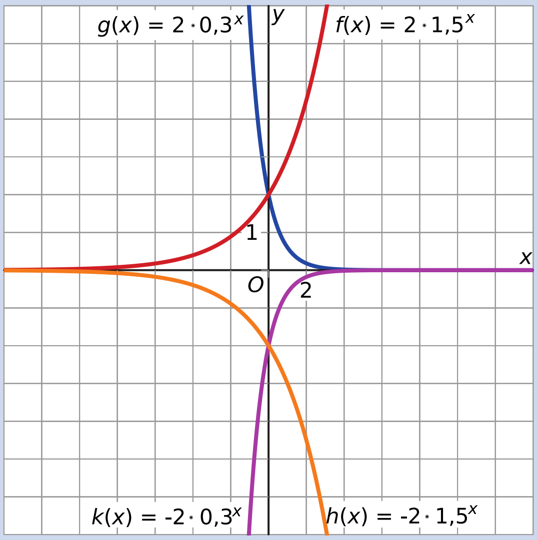
Om te onthouden

Bekijk de applet

Een **exponentiële functie** heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. b en g zijn onbekende getallen, x en y zijn variabelen.

De grafiek van een exponentiële functie heeft de volgende karakteristieken:

- Als $g = 1$ is de grafiek de horizontale lijn $y = b$.
- Als $b > 0$ en $g > 1$, is de grafiek stijgend. Naar links (voor afnemende x) nadert de grafiek de x-as. Je kunt de functiewaarde zo dicht bij 0 krijgen als je wilt door x voldoende klein te nemen. De x-as is de **horizontale asymptoot** van de grafiek.
- Als $b > 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek dalend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek naar de x-as.
- Als $b < 0$ en $0 < g < 1$, is de grafiek stijgend. Naar rechts (voor toenemende x) nadert de grafiek naar de x-as.
- Als $b < 0$ en $g > 1$, is de grafiek dalend. Naar links (voor afnemende x) benadert de grafiek de x-as.



Figuur 2

Voor iedere grafiek bij $f(x) = b \cdot g^x$ geldt dat deze de y-as snijdt in het punt $(0,b)$.

Exponentiële vergelijkingen zoals $b \cdot g^x = a$ kun je oplossen met de grafische rekenmachine. Bij **exponentiële ongelijkheden** kun je bovengenoemde karakteristieken gebruiken.

Voorbeeld 1

In het water van een meer is verontreiniging ontdekt, er wordt op een bepaald moment 40 mg/L (milligram per liter) van een bepaalde stof in het water aangetroffen. Gelukkig wordt deze stof op natuurlijke wijze afgebroken. De stof kan worden gemeten met een nauwkeurigheid van gehele mg/L. Het blijkt dat de concentratie exponentieel vervalt met 20% per dag.

Na hoeveel dagen is deze stof uit het meer verdwenen?

Antwoord

De ‘groeifactor’ per dag is 0,80. Op $t = 0$ is er 40 mg/L gemeten. Voor de concentratie C (in mg/L) geldt dus: $C(t) = 40 \cdot 0{,}80^t$.

Omdat de groeifactor tussen 0 en 1 ligt is dit een dalende exponentiële functie. Echter, zo'n exponentiële functie komt nooit op 0 uit, hoe groot je t ook kiest. $C(t)$ komt in de buurt van 0. Is de stof dan nooit verdwenen? Theoretisch inderdaad niet, maar in de praktijk is de stof niet meer meetbaar als de concentratie onder de 1 mg/L zakt (dat volgt uit de nauwkeurigheid van meten). Om te bepalen na hoeveel dagen de stof is verdwenen moet je daarom de ongelijkheid $40 \cdot 0{,}80^t < 1$ oplossen.

Dat doe je met de grafische rekenmachine. Je vindt: $t > 16{,}5$.

Opgave 3

In zie je de functie $C(t) = 40 \cdot 0{,}8^t$.

a Los de ongelijkheid $C(t) < 10$ op. Rond af op één decimaal.

b Heeft de vergelijking $C(t) = 0$ een oplossing?

Opgave 4

Los op. Rond af op twee decimalen.

a $2 \cdot 8^x < 40$

b $\frac{1}{3} \cdot 4^x \geq 124$

c $55 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 100$

Voorbeeld 2

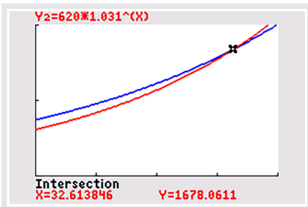
In een stedelijk gebied liggen twee middelgrote steden: A met 750000 inwoners en B met 620000 inwoners op 1 januari 2013. In A groeide het aantal inwoners de laatste jaren gemiddeld met 2,5% per jaar, in B was dat 3,1%.
Na hoeveel jaren is B groter dan A als deze ontwikkeling zo doorgaat?

Antwoord

Dat B harder groeit dan A is duidelijk. Als A het aantal inwoners van A en B dat van B voorstelt, dan geldt: de groeifactor van A is 1,025, die van B is 1,031. Neem A en B in duizendtallen, en t de tijd in jaren vanaf 1 januari 2013, dan zijn de groeifuncties:

- $A(t) = 750 \cdot 1{,}025^t$
- $B(t) = 620 \cdot 1{,}031^t$

De bijbehorende grafieken maak je op de grafische rekenmachine en je bepaalt het snijpunt. Ga na dat je $t = 32{,}6138...$ vindt.
Conclusie: 33 jaar na 1 januari 2013 is B groter als je ervan uitgaat dat er steeds op 1 januari wordt geteld.



Figuur 3

Opgave 5

Bestudeer **Voorbeeld 2**.

a Waaraan zie je dat stad B harder groeit dan stad A?

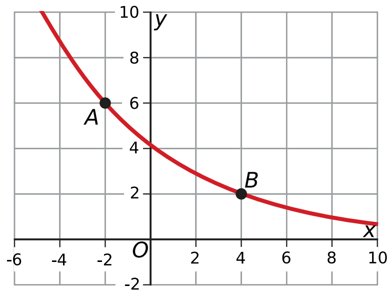
b Ga na dat je voor het snijpunt van beide grafieken inderdaad $t = 32{,}6138...$ vindt.

c Een derde stad C is op 1 januari 2013 kleiner dan zowel A als B. Maar deze stad groeit met 8,3% per jaar. Op 1 januari 2021 heeft C evenveel inwoners als B. In welk jaar is C even groot als A?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Een exponentiële functie heeft de vorm $f(x) = b \cdot g^x$. De grafiek gaat door de punten $A(-2{,}6)$ en $B(4{,}2)$.
Stel het bijpassende functievoorschrift op. Rond b en g af op twee decimalen.



Figuur 4

Antwoord

Bepaal eerst de groeifactor g:

Als x van -2 naar 4 gaat, wordt $f(x)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{3}$.

Voor g geldt daarom $g^6 = \frac{1}{3}$ en dus $g = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \approx 0{,}83$.

Nu kun je b berekenen.
Uit $f(4) = b \cdot 0{,}83^4 = 2$ volgt $b \approx 4{,}21$.

Conclusie: $f(x) \approx 4{,}21 \cdot 0{,}83^x$.

Opgave 6

Stel het voorschrift op van de exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ waarvan de grafiek door de punten $(10{,}200)$ en $(14{,}350)$ gaat. Rond g af op twee decimalen en b op gehelen.

Verwerken

Opgave 7

Een saldo van € 4000,00 kan ontstaan zijn doordat ooit iemand € 1,00 op een spaarrekening zette tegen 5% rente.

a Hoeveel jaar eerder moet die € 1,00 dan op de spaarrekening gezet zijn? Een antwoord tot op een jaar nauwkeurig is voldoende.

b Kun je dit antwoord ook vinden door een geschikte grafiek van $S(t) = 4000 \cdot 1{,}05^t$ te tekenen?

c Stel je voor dat je de grafiek van S steeds verder naar links door trekt. Zal de grafiek ooit de horizontale as snijden? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

Los de ongelijkheden op. Rond af op twee decimalen.

a $50 \cdot 1{,}5^x < 200$

b $25 \cdot 1{,}8^x > 250 \cdot 0{,}75^x$

Opgave 9

Op 1 januari 2010 zet persoon A € 2000,00 op de bank tegen 4% rente per jaar. Persoon B zet op die dag € 1500,00 op de bank tegen 6% rente per jaar.

a Geef de functievoorschriften van het banktegoed $a(t)$ van persoon A en het banktegoed $b(t)$ van persoon B, waarbij t de tijd in jaren is na 1 januari 2010.

b Maak met de grafische rekenmachine de grafieken van de functies a en b. Bij welke vensterinstellingen komen de grafieken zo in beeld dat ook het snijpunt zichtbaar is?

c Vanaf welke maand van welk jaar is het banktegoed van persoon B groter dan dat van persoon A?

Opgave 10

Op een afgelegen terrein werd op 6 januari 2014 een hoeveelheid radioactief afval gevonden. Aangenomen wordt dat dit afval er al tien jaar heeft gelegen. De straling blijkt 2000 Bq (becquerel) te zijn. Vier maanden later wordt de straling opnieuw gemeten. Deze blijkt nu ongeveer 1630 Bq te zijn. De straling neemt exponentieel af.

a Hoeveel Bq was de straling een jaar voor de vondst op 6 januari 2014? Rond af op gehelen.

b Hoe groot is de straling 2,5 jaar na 6 januari 2014?

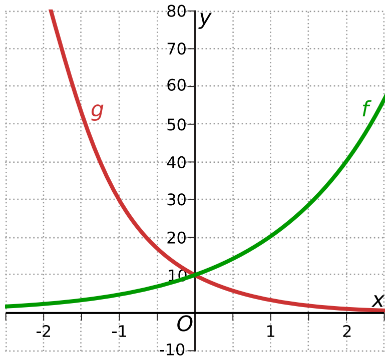
c Stel een functievoorschrift op voor de hoeveelheid straling, afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 6 januari 2014.

d Vanaf welke datum is de straling minder dan 1000 Bq?

Opgave 11

Bekijk de grafieken van twee exponentiële functies.

Geef van beide functies het functievoorschrift.



Figuur 5

Opgave 12

Een huurder betaalt een huur van € 650,00 en vindt de jaarlijkse huurverhoging van 5,5% te veel. Hij herinnert zich nog dat exponentiële groei veel harder gaat dan lineaire groei. Hij stelt zijn verhuurder daarom voor om de huur elk jaar met € 50,00 te verhogen.

Na hoeveel jaar gaat dit de huurder voordeel opleveren?

Toepassen

Opgave 13: De wet van Moore

Het Amerikaanse bedrijf Intel is een zeer grote producent van computerchips. Gordon Moore was in 1968 één van de oprichters van het bedrijf. Deze opgave gaat over het aantal transistoren in een computerchip. (Een transistor is een elektronisch onderdeel van een chip.) In 1965 deed Moore daar een voorspelling over: Het aantal transistoren in een computerchip zal tussen 1965 en 1975 exponentieel groeien. Moore heeft meer dan gelijk gekregen: de voorspelling is zelfs tot het jaar 2010 uitgekomen! Zijn voorspelling is men de Wet van Moore gaan noemen. In de tabel zie je hoeveel transistoren er in de chips van Intel zitten. Ook zie je in welk jaar die chips op de markt zijn gebracht.

introductiejaar	naam chip	aantal transistoren
1971	4004	2250
1982	286	120000
1993	Pentium I	3100000
2000	Pentium IV	42000000
2014	Ivy Bridge	4,31 miljard

Tabel 1

In de tabel zie je dat het aantal transistoren tussen 1971 en 1982 met 117750 toeneemt.

a Stel dat het aantal transistoren in de jaren daarna lineair toe zou nemen met 117750 per jaar. In welk jaar zou dan het aantal van 3100000 transistoren per chip zijn bereikt? Licht je antwoord toe.

b In werkelijkheid is de toename dus exponentieel. Zo is in de periode van 1971 tot 2000 het aantal transistoren per chip toegenomen van 2250 tot 42 miljoen.

Bereken hiermee de groeifactor per jaar in vier decimalen nauwkeurig.

De Wet van Moore in formulevorm is: $A = 2250 \cdot 1{,}404^t$. Hierin is A het aantal transistoren per chip en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1971. In de Ivy Bridge chip zitten volgens de tabel 4,31 miljard transistoren. Dat aantal transistoren wijkt af van de voorspelling volgens de Wet van Moore.

c Bereken hoeveel procent dit aantal afwijkt van de voorspelling volgende de formule van de Wet van Moore.

d Met behulp van de formule kun je een berekening maken wanneer er 10 miljard transistoren in een computerchip zitten. Bereken in welk jaar dit volgens deze formule het geval is.

(bron: examen wiskunde A havo 2005, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 14

Een bepaalde hoeveelheid H groeit vanaf $t = 0$ volgens $H(t) = 200 \cdot 1{,}03^t$.

a Hoe zie je aan het functievoorschrift dat er echt van toename sprake is?

b Vanaf welke waarde van t (in drie decimalen nauwkeurig) is de hoeveelheid 200% groter geworden dan op $t = 0$?

c Neem aan dat ook voor $t = 0$ deze hoeveelheid met 3% per tijdseenheid groeide. Voor welke waarden van t is de hoeveelheid kleiner dan 0,01?

Opgave 15

Iemand betaalt op 1 januari 2000 een huur van € 850,00 per maand. Jaarlijks wordt in januari zijn huur met 5,5% verhoogd.

a Stel het functievoorschrift op voor de huur per maand $H(t)$ afhankelijk van de tijd t in jaren na 2000.

b Vanaf welke datum is de huur hoger dan € 1000,00 per maand?

Opgave 16

De grafiek van een exponentiële functie $f(x) = b \cdot g^x$ gaat door de punten (2,80) en (8,200).

Stel een bijpassend functievoorschrift op.