3.3 Exponenten en machten

Inleiding

Je hebt in het kader van exponentiële groei allerlei rekenregels en eigenschappen van machten en hun exponenten opgebouwd. Deze eigenschappen van exponenten en machten zul je veel moeten toepassen. Daarom moet je die eigenschappen goed ‘in de vingers hebben’.
Hoog tijd voor algebraïsche vingeroefeningen...

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de rekenregels voor exponenten en machten;
- uitdrukkingen herschrijven zonder negatieve of gebroken exponenten;
- uitdrukkingen herschrijven als een macht van x;
- herleiden van formules tot de standaardvorm.

Voorkennis

- werken met negatieve en gebroken exponenten;
- de rekenregels voor het vermenigvuldigen en delen van machten en voor machten van machten.

Verkennen

Opgave V1

Bereken: $\dfrac{\sqrt[3]{14^{120}}}{14^{39}}$

Uitleg

Om $\dfrac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}}$ te kunnen berekenen, moet je de eigenschappen van machten goed beheersen. De rekenmachine laat je namelijk (zeer waarschijnlijk) in de steek. Eerst schrijf je de teller als macht van negentien:

$$\sqrt[4]{19^{220}} = \left(19^{220}\right)^{\frac{1}{4}} = 19^{220 \cdot \frac{1}{4}} = 19^{55}$$

Dus: $\dfrac{\sqrt[4]{19^{220}}}{19^{54}} = \dfrac{19^{55}}{19^{54}} = 19^{55-54} = 19$

Bekijk stap voor stap welke eigenschappen er zijn gebruikt.

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

a Welke eigenschap van machten is er in de eerste stap gebruikt voor het ‘wegwerken’ van de wortel?

b Welke eigenschap is er vervolgens gebruikt?

c En welke eigenschap als laatste?

Opgave 2

Bereken: $\dfrac{31^{25} \cdot \sqrt[3]{31^{30}}}{\left(31^{12}\right)^3}$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor elk positief grondtal g en voor willekeurige reële getallen a en b gelden de volgende **eigenschappen van machten**:

- $g^0 = 1$
- $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$
- $g^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{g}$ mits $a > 0$ en a een geheel getal
- $g^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{g^b} = \left(\sqrt[a]{g}\right)^b$ mits $a > 0$ en a een geheel getal
- $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$
- $g^{a-b} = \frac{g^a}{g^b}$
- $\left(g^a\right)^b = g^{a \cdot b}$

Bij exponentiële functies mag je ervan uitgaan dat het grondtal g positief is.

Denk verder nog aan de eigenschap $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Voorbeeld 1

Je ziet enkele berekeningen met behulp van de eigenschappen van machten.

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3^1}\right)^{-4} = \left(3^{-1}\right)^{-4} = 3^4 = 81$
- $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
- $16^{1,5} = 16^{1+\frac{1}{2}} = 16^1 \cdot 16^{\frac{1}{2}} = 16 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 = 64$
- $27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Opgave 3

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a 3^{-2}

b $8^{1\frac{2}{3}}$

c 4^{-3}

d $81^{\frac{1}{4}}$

e $2^{-3} \cdot 2^7$

f $\frac{5^2 \cdot 5^3}{25^{1,5}}$

Voorbeeld 2

Je ziet voorbeelden van het schrijven van uitdrukkingen zonder gebroken of negatieve exponenten.

- $2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$
- $5x^{1\frac{1}{3}} = 5 \cdot x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 5x \cdot \sqrt[3]{x}$
- $x^{-1\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}}$

Opgave 4

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $2x^{2\frac{1}{3}}$

b $\frac{3x^{-1}}{2x}$

c $4x^{-\frac{3}{4}}$

d $2x^{2\frac{1}{2}}$

e $\frac{1}{3}x^{-4}$

f $3x^{-2\frac{1}{2}}$

Voorbeeld 3

Je ziet voorbeelden van het schrijven van uitdrukkingen als macht van x.

- $\frac{1}{x^5} = x^{-5}$
- $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$
- $3x\sqrt{x} = 3x^1 \cdot \sqrt{x} = 3x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = 3x^{1\frac{1}{2}}$
- $\frac{2x^4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2x^4}{x^{\frac{1}{3}}} = 2x^{3\frac{3}{4}}$

Opgave 5

Schrijf als macht van x.

a $\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x}$

b $\frac{2x}{x\sqrt{x}}$

c $5(\sqrt[3]{x})^2$

d $\frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt[3]{x}}$

Voorbeeld 4

De formule $y = 0{,}5^{2x-1}$ kun je met behulp van de eigenschappen voor machten herleiden tot de standaardvorm $y = b \cdot g^x$ voor exponentiële groei. Bepaal de groeifactor g (per eenheid x) en het begingetal b. Schrijf de functie vervolgens in de standaardvorm.

Antwoord

De formule kun je als volgt herleiden:

$y = 0{,}5^{2x-1}$

een aftrekking is optellen met een negatief getal

$y = 0{,}5^{2x+-1}$

gebruik de rekenregel: $g^{a+b} = g^a \cdot g^b$

$y = 0{,}5^{2x} \cdot 0{,}5^{-1}$

gebruik de rekenregel: $g^{a \cdot b} = (g^a)^b$

$y = \left(0{,}5^2\right)^x \cdot 0{,}5^{-1}$

gebruik de rekenregel: $g^{-a} = \frac{1}{g^a}$

$y = \left(0{,}5^2\right)^x \cdot \frac{1}{(0{,}5)^1}$

gebruik: $0{,}5^2 = 0{,}25$

$y = 0{,}25^x \cdot \frac{1}{0{,}5}$

bereken $\frac{1}{0{,}5}$

$y = 2 \cdot 0{,}25^x$

Het kan ook korter, bijvoorbeeld zo:

$y = 0{,}5^{2x-1} = 0{,}5^{2x} \cdot 0{,}5^{-1} = \left(0{,}5^2\right)^x \cdot 2 = 2 \cdot 0{,}25^x$

Het functievoorschrift heeft nu de vorm van de formules voor exponentiële groei. Het begingetal b is 2 en de groeifactor g is 0,25.

Opgave 6

Gegeven is de formule $y = 0{,}5^{2x+1}$. Deze formule beschrijft exponentiële groei.

a Waarom is de groeifactor per eenheid niet gelijk aan 0,5?

b Schrijf de formule in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

Opgave 7

Schrijf de formules in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

a $y = 2 \cdot 3^{2x+2}$

b $y = 5 \cdot 0{,}2^{3x-1}$

c $y = 0{,}4 \cdot 5^{-2x+3}$

Verwerken

Opgave 8

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a $\left(2^3\right)^2$

b $2^3 \cdot 2^2$

c $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^8$

d $\sqrt[3]{1000}$

Opgave 9

Schrijf als macht van x.

a $\frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

b $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

c $\sqrt{x} \cdot x^{-2}$

d $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

Opgave 10

Schrijf de machten van x zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a x^{-1}

b $x^{-\frac{1}{2}}$

c $x^{\frac{3}{4}}$

d $x^{1\frac{3}{4}}$

e $3x^{-1,5}$

f $x^{-2,75}$

Opgave 11

Bereken met behulp van de eigenschappen van machten.

a $\frac{17^{105}}{17^{23}} \cdot 17^{-85}$

b $\left(\frac{1}{2}\right)^{219} \cdot 8^{72}$

c $\left(\frac{3}{4}\right)^{231} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{230} \cdot 3^{233}$

d $\frac{7^{102}}{\left(49^{10}\right)^{5}}$

e $\left(\frac{4}{9} \cdot \sqrt[3]{64}\right)^{\frac{1}{2}}$

f $\frac{5^{3} \cdot \left(3^{5}\right)^{15}}{25 \cdot \sqrt[3]{3^{225}}}$

Opgave 12

Schrijf de volgende formules in de vorm $y = a \cdot x^{b}$.

a $y = \left(2x^{3}\right)^{4} \cdot -3x^{5}$

b $y = \frac{2x \cdot x^{2}}{x^{6}}$

c $y = 4x^{2} \cdot \sqrt[3]{x}$

d $y = \frac{2}{x\sqrt{x}}$

Opgave 13

Schrijf de volgende formules in de standaardvorm $y = b \cdot g^{x}$.

a $y = 3 \cdot 2^{0,5x}$

b $y = 0,5^{-x+2}$

c $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-2x}$

d $y = 6 \cdot 2^{4x-2}$

Toepassen

Opgave 14: Exponentiële groei of niet?

Gegeven is de formule $y = 4^{-2x+1}$. Deze formule beschrijft exponentiële groei.

a Waarom is de groeifactor per eenheid niet gelijk aan 4?

b Schrijf de formule in de standaardvorm $y = b \cdot g^x$.

Gegeven is de formule $y = 4^{-2x} + 1$. Deze formule beschrijft geen zuivere exponentiële groei.

c Laat dat zien door de formule te herleiden.

Testen

Opgave 15

Schrijf de volgende uitdrukkingen als macht van 5 of 7. Bereken met de rekenregels van machten.

a $5^{-5} \cdot 25^2$

b $7^{-10} \cdot \left(7^3\right)^5$

c $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$

d $125^{-\frac{1}{3}}$

Opgave 16

Herleid de uitdrukkingen naar de vorm ax^n.

a $2x^4 \cdot \left(3x^3\right)^2$

b $\frac{x^3 \cdot 5x^4}{x^8}$

c $\frac{3}{\sqrt{x}}$

d $5x \cdot \sqrt[5]{x^2}$

Opgave 17

Schrijf zonder negatieve en/of gebroken exponenten.

a $x^{1\frac{1}{4}}$

b $\frac{x^2 \cdot x^{-4}}{\sqrt{x}}$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **de rekenregels voor machten en exponenten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.