2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Functies en grafieken**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- functie — invoerwaarde — functiewaarde — functievoorschrift
- domein — bereik — nulwaarden/nulpunten — extremen/toppen
- lineaire functie — kwadratische functie — familie van functies, parameters
- asymptoten — karakteristieken (nulpunten, toppen, asymptoten)
- ongelijkheid

Activiteitenlijst

- functies herkennen — de notaties bij het functiebegrip gebruiken
- het domein en het bereik van een functie bepalen — de intervalnotatie gebruiken
- werken met lineaire functies en kwadratische functies
- asymptoten bepalen — karakteristieken van een functie bepalen
- ongelijkheden oplossen

Achtergronden

Figuur 1

René Descartes (1596—1650) – een Franse geleerde die een groot deel van zijn leven in De Nederlanden woonde – bedacht dat je lijnen en krommen kunt beschrijven met formules in x en y als je een assenstelsel invoert. Maar in die tijd werden deze lijnen en krommen als statische meetkundige objecten beschouwd, waaraan je, door ze in algebraïsche taal om te vormen, gemakkelijk kunt rekenen.

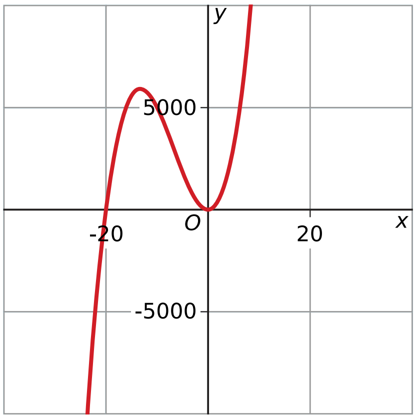
Pas nadat **Isaac Newton (1642—1727)** de natuurkundige bewegingswetten in wiskunde omzette, werden formules gebruikt om verbanden tussen variabelen te beschrijven. Daarmee ontstond langzamerhand het functiebegrip: bij een bepaald tijdstip hoorde een bepaalde afgelegde afstand, die afstand was een functie van de tijd.

De wiskundige **Leonhard Euler (1707—1783)** voerde de notatie $f(x)$ in. In 1748 schreef Euler het boek 'Introductio in analysin infinitorum', waarin de fundamenten van de analyse van functies systematisch uiteen werden gezet. Daarmee is hij de grondlegger van de functietheorie.

Testen

Opgave 1

Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x^2(x+20)$ en $g(x) = 50x^2$. De grafiek van f zie je hier.



Figuur 2

a Bereken algebraïsch de nulpunten van f en breng de grafiek in beeld. Pas de vensterinstellingen zo aan, dat je hetzelfde beeld krijgt als in de gegeven grafiek. Zet nu ook de grafiek van g er bij.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

c Los op: $f(x) < g(x)$.

Opgave 2

Bereken bij deze functies eerst de nulpunten. Bepaal vervolgens het domein en het bereik.

a $f(x) = x^2\left(x^2 - 400\right)$

b $g(x) = \sqrt{20 - x} - 40$

Opgave 3

Gegeven is de functie $y(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$.

a Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

b Schrijf het domein en het bereik op.

c Los op: $y \geq 2$. Geef benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 4

Gegeven is de functie f met $f(x) = 0{,}25(x-10)^2 - 16$.

a Door welke herschalingen en/of verschuivingen kan de grafiek van f ontstaan uit die van de standaardfunctie $y = x^2$?

b Bepaal de top en de nulpunten van de grafiek van f.

c Los algebraïsch op: $f(x) < 10$.

Opgave 5

In een steenkolenmijn wordt het steenkolengruis via een transportband omhooggevoerd. Het verband tussen de hoogte h (in meter) en de tijd t (in seconden) is lineair. Na 10 seconden is het gruis op een hoogte van 30 meter onder zeeniveau. Na 20 seconden is het gruis op 5 meter onder zeeniveau. Het gruis wordt uiteindelijk gestort op 22 meter boven zeeniveau.

a Stel het functievoorschrift op voor h als functie van t.

b Na hoeveel seconden komt het gruis boven de grond?

c Geef het domein en het bereik van h in de intervalnotatie.

Opgave 6

Een sneeuwbal wordt van een hele lange besneeuwde helling gerold. De sneeuwbal wordt daardoor bij elke omwenteling dikker. Stel dat die sneeuwbal op het moment van loslaten een diameter van 10 cm heeft en zuiver rond is. Neem aan dat de sneeuwbal telkens zuiver rond blijft en dat bij elke omwenteling de diameter met 1 cm toeneemt. Het volume V van een bol kun je berekenen met de formule $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ waarin r de straal van de bol is. De hoeveelheid sneeuw S waaruit de sneeuwbal bestaat, is een functie van het aantal omwentelingen a.

a Stel een functievoorschrift voor $S(a)$ op.

b Breng de grafiek in beeld. Schrijf op bij welke vensterinstellingen een bij de situatie passend deel van de grafiek in beeld komt.

c Na hoeveel omwentelingen heeft de sneeuwbal een volume van ongeveer 1000 dm^3?

Toepassen

Opgave 7: Economisch model

Functies worden regelmatig gebruikt om economische modellen te beschrijven. Bijvoorbeeld hangt de hoeveelheid q die per week van een product verkocht wordt af van de prijs p. Dat verband kan onder bepaalde economische omstandigheden lineair zijn, bijvoorbeeld: $q = 4000 - 200p$ met p in euro's en q in eenheid product. Met de grafische rekenmachine is van deze formule een grafiek te maken. Omdat zowel p als q positieve getallen zijn varieert p van 0 tot 20 en q van 0 tot 4000.

In dit model heeft elke euro prijsverhoging een daling van de verkoop met 200 stuks tot gevolg. Maar zo'n prijsverhoging hoeft niet ongunstig voor de opbrengst R (R van resultaat) te zijn: R hangt niet alleen van de verkochte hoeveelheid q af, maar ook van de prijs p per stuk. De opbrengst is de verkochte hoeveelheid maal de prijs per eenheid. In formulevorm: $R = p \cdot q$.

Door beide formules te combineren kun je R uitdrukken in p: $R = p \cdot (4000 - 200p)$. Met de GR vind je dat de opbrengst maximaal is als $p = 10$. Reken na, dat de maximale opbrengst € 20000,00 is.

Een bedrijf is meer geïnteresseerd in de maximale winst. Om die te berekenen moet je ook iets weten over de kosten K die worden gemaakt voor de verkoop van het product. Vaak zijn die afhankelijk van de hoeveelheid q. Stel je voor dat elk product het bedrijf € 6,00 kost. Dan geldt: $K = 6q$.
De winst is nu: $W = R - K = p \cdot (4000 - 200p) - 6q$.
Dus: $W = p \cdot (4000 - 200p) - 6(4000 - 200p) = -200p^2 + 5200p - 24000$.
Met de GR bepaal je de waarde van p waarbij de winst maximaal is.

a Leid zelf de winstformule af.

b Bereken de maximale winst die dit bedrijf per week kan maken.

Een levensmiddelenbedrijf heeft 30000 blikken bonen ingekocht voor € 0,90 per stuk. Men wil die blikken bonen binnen 30 werkdagen als aanbieding verkopen. Uit ervaring weet de handelaar dat zijn prijs bepaalt hoeveel blikken bonen hij per dag kan verkopen en dat hij daarvoor uit kan gaan van de volgende formule: $p = 2{,}5 - \frac{q}{1000}$ waarin p de verkoopprijs in € per blik is en q het aantal blikken dat hij per dag verkoopt.

c Als hij deze blikken bonen verkoopt voor € 1,60 per stuk, raakt hij ze dan binnen de gestelde termijn kwijt? En maakt hij winst op de partij?

d Bij welke verkoopprijs per blik is zijn winst maximaal als hij de termijn van 30 werkdagen om alles te verkopen laat vallen?

Examen

Opgave 8: Toltunnel

Het aantal personenauto's (A) dat per dag van een nieuw aan te leggen toltunnel gebruik zal maken, is volgens een verkeersdeskundige te berekenen met de formule: $A = 400T^2 - 9150T + 46800$. Hierbij is T het toltarief in euro. Toltarieven hoger dan € 7 blijven buiten beschouwing. Met het oog op een snelle doorstroming zal de betaling op elektronische wijze geschieden. Hierdoor is het mogelijk om een toltarief van € 2,67 in rekening te brengen omdat dat niet op praktische bezwaren stuit.

a Bereken de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's bij een toltarief van € 2.

b Bereken in centen nauwkeurig bij welk toltarief de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's maximaal is.

c Bereken met hoeveel procent het aantal personenauto's afneemt als bij een tarief van € 2,40 een tariefsverhoging van 5% wordt toegepast.

(bron: examen vwo wiskunde A in 1992, eerste tijdvak)

Opgave 9: Wielrennen

Bij wielrennen gaat het er meestal om in een zo kort mogelijke tijd een gegeven afstand af te leggen. Daarnaast kent men het wereld-uurrecord. Daarbij gaat het erom in precies één uur een zo groot mogelijke afstand af te leggen. Op 2 september 1994 reed Miguel Indurain op de wielerbaan van Bordeaux in één uur 53,040 km. Hij vestigde daarmee het wereld-uurrecord. Kort daarna raakte hij zijn record kwijt aan Toni Rominger, die op 5 november 1994 op dezelfde baan in één uur 55,291 km reed. De afgelegde afstand bestaat uit een groot aantal rondes op de wielerbaan. Elke ronde is 250 meter. Stel dat Indurain en Rominger deze ritten tegelijkertijd hadden gereden, en naast elkaar waren gestart en dat ieder met constante snelheid reed.

a Hoeveel keer zou Rominger na de start in de loop van het uur Indurain hebben ingehaald? Licht je antwoord toe.

Om te voorspellen of een wielrenner een bepaalde snelheid kan halen, kijkt men naar het daarvoor benodigde vermogen (W), dat is de energie die de wielrenner per seconde moet leveren. Daarbij speelt de luchtweerstand een belangrijke rol. De luchtweerstand kan onder andere verkleind worden door de stroomlijn van fietser en fiets te verbeteren. Men gebruikt vaak de volgende formule voor W: $W = \left(k \cdot v^2 + 4\right) \cdot v$ Hierbij geldt:

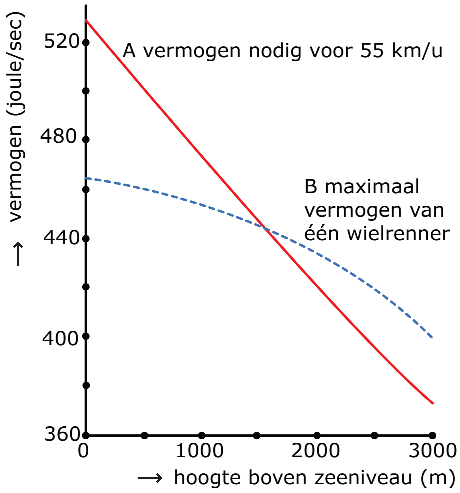
- v is de snelheid (in m/sec);
- W is het vermogen (in joule/sec) dat de wielrenner moet leveren;
- k is een getal dat onder andere te maken heeft met de luchtweerstand.

Daan wil zich op de wielersport gaan toeleggen.Van een medische keuring weet hij dat hij gedurende enige tijd een vermogen kan leveren van 190 joule/sec. Op zijn huidige fiets haalt hij een snelheid van 33 km/uur, dus ruim 9 m/sec. Met behulp van bovenstaande formule leidt hij hieruit af dat $k = 0{,}2$. Door veel te trainen hoopt Daan een vermogen te kunnen leveren van 300 joule/sec. Om er achter te komen wat de maximale snelheid is die hij dan kan halen, tekent hij voor $k = 0{,}2$ de grafiek van W als functie van v. Hij kan nu aflezen dat zijn maximale snelheid dan bijna 11 m/sec zal zijn (ongeveer 39 km/uur). Daan is ook van plan een nieuwe fiets en nieuwe fietskleding te kopen. Volgens kenners kan hij daarmee k verlagen tot $k = 0{,}15$. Daan vraagt zich af welke snelheid hij dan kan behalen. Om de vraag te kunnen beantwoorden, moet hij een nieuwe grafiek tekenen.

b Welke snelheid (in km/uur) zal Daan kunnen behalen met een vermogen van 300 joule/sec, bij $k = 0{,}15$? Licht je antwoord toe met behulp van een grafiek.

De wielerbaan van Bordeaux ligt op zeeniveau. Voordat Indurain en Rominger hun eerder genoemde recordritten reden, beweerde iemand dat de magische grens van 55 kilometer in één uur slechts op grote hoogte boven zeeniveau bereikt zou kunnen worden. (Daar is de lucht ijler en dus de luchtweerstand kleiner. Daardoor is k kleiner.) Om zijn bewering te illustreren maakte hij deze figuur. Hierin is grafiek A als volgt tot stand gekomen.

Bij een officieel record moeten fiets en berijder aan allerlei voorschriften voldoen. De mogelijkheden om binnen deze voorschriften de stroomlijn te verbeteren leken optimaal benut. Daarmee lag voor elke hoogte de waarde van k vast. Met behulp van de formule voor W kon hij dus berekenen hoeveel vermogen een wielrenner nodig had om 55 km/uur (15,3 m/sec) te fietsen. Zo is bijvoorbeeld, volgens de maker van deze figuur, op zeeniveau $k = 0{,}13$.



Figuur 3

c Bereken hoe groot k is op 2000 meter hoogte volgens de maker van de figuur.

In grafiek B van de figuur is het maximale vermogen te zien dat een ideale wielrenner een uur lang zou kunnen leveren. (Ook dat neemt af naarmate men hoger komt, doordat de ijlere lucht minder zuurstof bevat.) Volgens de maker van de figuur zou de prestatie van Rominger (55,291 km) op zeeniveau onmogelijk zijn. Het record van Indurain was 53,040 km.

d Onderzoek met behulp van de formule voor W of het record van Indurain volgens de maker van de figuur op zeeniveau wel mogelijk is.

(bron: examen vwo wiskunde A in 1999, tweede tijdvak)

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.