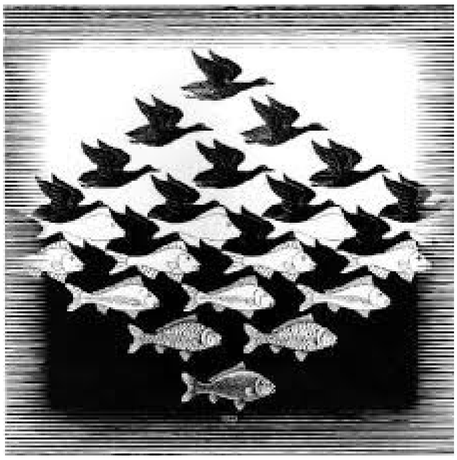
2.5 Verschuiven en vervormen

Inleiding

Veel functies ontstaan uit een standaardfunctie door bij de functie een getal op te tellen en/of door de functie met een getal te vermenigvuldigen. De grafieken lijken dan op elkaar. De karakteristieken van die grafiek zijn dan uit die van de standaardfunctie af te leiden. Zo zijn alle functies van de vorm $y = ax + b$ af te leiden uit de standaardfunctie $y = x$. Ze hebben bijvoorbeeld dezelfde vorm: een rechte lijn.

Bij dit onderdeel heb je bij enkele opgaven een computer nodig!



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- grafieken verschuiven en herschalen;
- karakteristieken van verschoven of herschaalde grafieken van standaardfuncties bepalen.

Voorkennis

- de karakteristieken van een functie bepalen en zo de grafiek goed in beeld krijgen;
- het domein en het bereik van een functie opschrijven;
- werken met de belangrijkste basisfuncties.

Verkennen

Opgave V1

De grafiek van $f(x) = x^2$ kun je vervormen en/of verschuiven.

Bekijk de applet

a Maak de grafiek van $g_1(x) = (x - 4)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_1 ontstaat uit die van f.

b Maak de grafiek van $g_2(x) = x^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_2 ontstaat uit die van f.

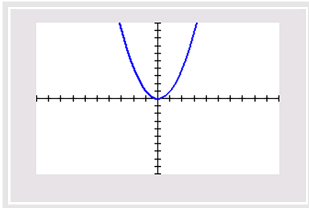
c Maak de grafiek van $g_3(x) = 1{,}5 \cdot x^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_3 ontstaat uit die van f.

d Maak de grafiek van $g_4(x) = (3 \cdot x)^2$. Beschrijf hoe de grafiek van g_4 ontstaat uit die van f.

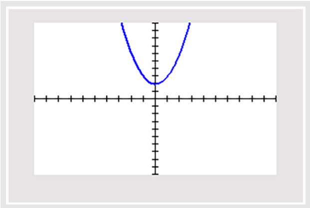
e Maak de grafiek van $g_5(x) = 1{,}5(x - 4)^2 + 3$. Beschrijf hoe de grafiek van g_5 ontstaat uit die van f.

Uitleg

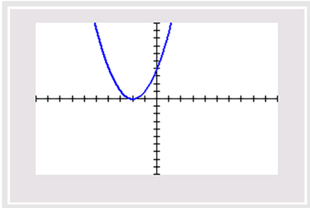
Je ziet de grafiek van de kwadratische standaardfunctie $f(x) = x^2$ op de grafische rekenmachine met de standaardinstellingen. Door de functie te vermenigvuldigen met een getal of door er een getal bij op te tellen, vervorm je de grafiek van deze standaardfunctie.



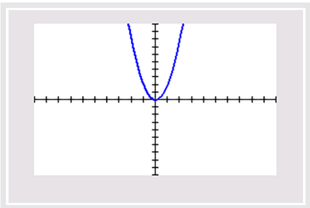
Figuur 2



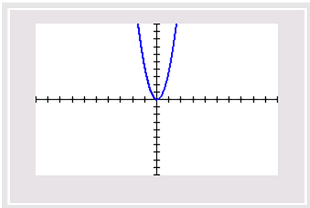
$y = x^2 + 2$



$y = (x + 2)^2$



$y = 2 \cdot x^2$



$y = (2 \cdot x)^2$

Figuur 3

Je moet vier van die vervormingen kennen:

- De grafiek van $y = x^2 + 2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de y-coördinaat met 2 te verhogen. De grafiek schuift dus 'omhoog'.
- De grafiek van $y = (x + 2)^2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de x-coördinaten te vervangen door de x-coördinaat van het punt dat 2 verder naar rechts ligt. De grafiek verschuift dus naar 'links'.
- De grafiek van $y = 2 \cdot x^2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de y-coördinaat met 2 te vermenigvuldigen. De punten van de grafiek komen daarom 2 keer zo ver van de x-as af te liggen. Dit heet 'herschalen' in de y-richting.
- De grafiek van $y = (2 \cdot x)^2$ ontstaat door van alle punten van de standaardgrafiek de x-coördinaten te vervangen door de x-coördinaat van het punt dat 2 keer zo ver naar rechts ligt. De punten van de grafiek komen daarom een $\frac{1}{2}$ keer zo ver van de y-as te liggen. Dit heet 'herschalen' in de x-richting.

Opgave 1

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door verschuiven en herschalen van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke vervormingen dat zijn.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot x^2$

b $y_3 = (x - 4)^2 + 2$

c $y_4 = 2 - x^2$

d $y_5 = (3x)^2 + 2$

Opgave 2

Ga uit van de standaardfunctie $y_1 = x^3$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door verschuiven en/of herschalen van de grafiek van deze functie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke vervormingen dat zijn.

a $y_2 = 3 \cdot x^3$

b $y_3 = (x+4)^3 + 2$

c $y_4 = 5 - 2x^3$

d $y_5 = (0{,}5x)^3 + 1$

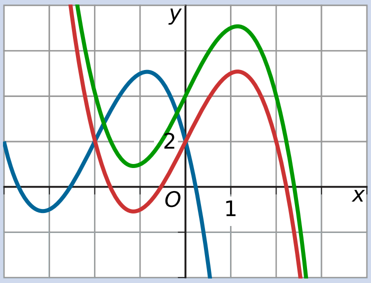
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Ga uit van een functie $y = f(x)$, de rode grafiek in de figuur.

Je kunt deze grafiek vervormen. Bijvoorbeeld:

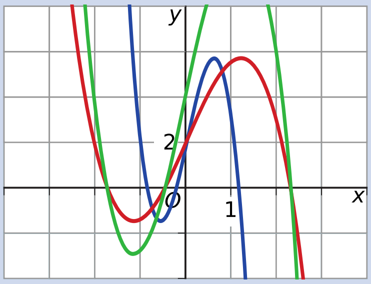
- De groene grafiek, $y = f(x) + 2$, is ontstaan door de grafiek van f 2 naar ‘boven’ te verschuiven. Je noemt dat ook **verschuiven in de y-richting** over 2.
- De blauwe grafiek, $y = f(x+2)$, is ontstaan door de grafiek van f 2 naar ‘links’ te schuiven. Je noemt dat ook **verschuiven in de x-richting** over -2.



Figuur 4

Ga weer uit van een functie $y = f(x)$ (de rode grafiek in de figuur).

- De groene grafiek, $y = 2 \cdot f(x)$, is ontstaan door de grafiek van f ten opzichte van de x-as met factor 2 te vermenigvuldigen. Dit noem je ook **herschalen in de y-richting** met factor 2.
- De blauwe grafiek, $y = f(2 \cdot x)$, is ontstaan door de grafiek van f ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2}$ te herschalen. Dit noem je ook **herschalen in de x-richting** met factor $\frac{1}{2}$.



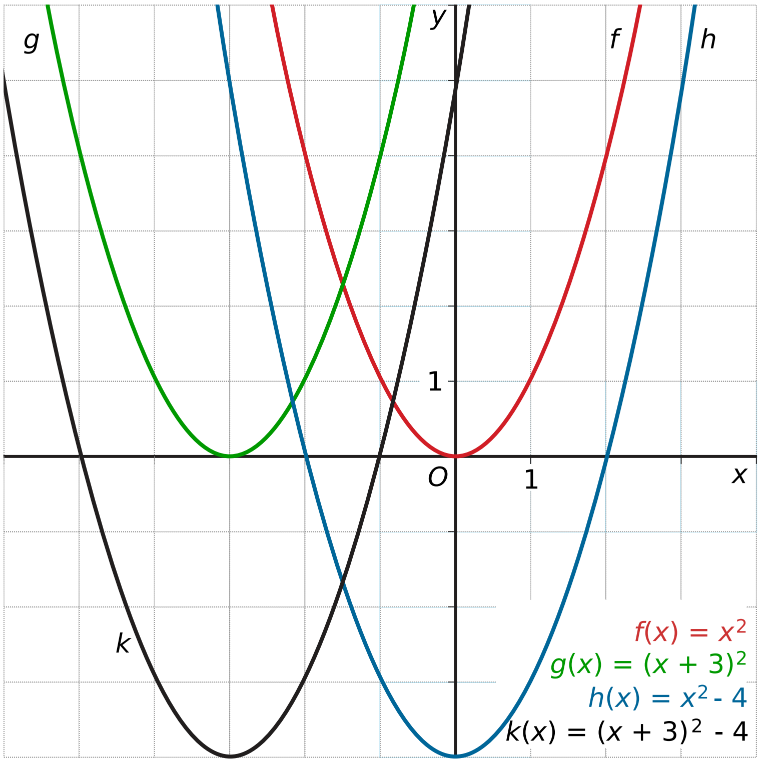
Figuur 5

Verschuivingen en herschalingen kunnen ook worden gecombineerd.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Grafieken verschuiven

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$, met als top (0,0).



Figuur 6

De grafiek van g ontstaat uit die van f door f te verschuiven in de x-richting over -3. Het functievoorschrift van g wordt $g(x) = (x+3)^2$. Let op de haakjes! De top verschuift mee en komt te liggen op (-3,0).

De grafiek van h ontstaat door die van $f(x)$ te verschuiven in de y-richting over -4. Het functievoorschrift wordt $h(x) = x^2 - 4$. De top verschuift weer mee en komt te liggen op (0,-4).

De grafiek van k ontstaat door die van f 3 naar 'links' en 4 'omlaag' te verschuiven. Het functievoorschrift wordt $k(x) = (x+3)^2 - 4$. Let op de haakjes! De top verschuift weer mee en komt te liggen op (-3,-4).

Opgave 3

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $y_2 = f(x+4)$ op. Plot de grafiek van y_2. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $y_3 = f(x) + 5$ op. Plot de grafiek van y_3. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f?

d Schrijf het functievoorschrift van $y_4 = f(x+4)+5$ op. Plot de grafiek van y_3. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f?

Voorbeeld 2

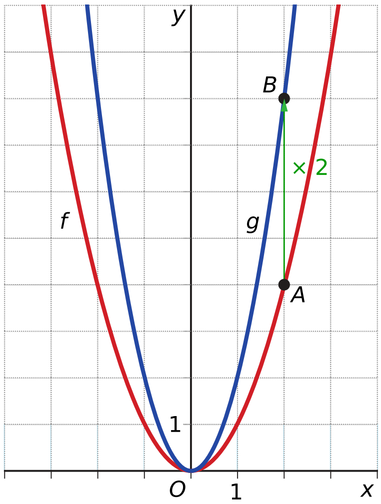
Bekijk de applet: Grafieken herschalen

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = x^2$.

De grafiek van $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ ontstaat uit die van f door herschalen in de y-richting met factor 2. Je ziet in de grafiek dat de y-coördinaat van punt B gelijk is aan 8 en dat is twee keer zo groot als de y-coördinaat van punt A.

Stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan geldt:
$g(x) = 2 \cdot f(x) = 2\left(x^2 - 2x\right)$.

Je vermenigvuldigt de hele formule met 2 en je moet dus soms met haakjes werken. Eventueel kun je de haakjes daarna weer wegwerken:
$2\left(x^2 - 2x\right) = 2x^2 - 4x$



Figuur 7

Algemeen geldt: de grafiek van $g(x) = d \cdot f(x)$ ontstaat uit die van f door herschalen in de y-richting met factor d.

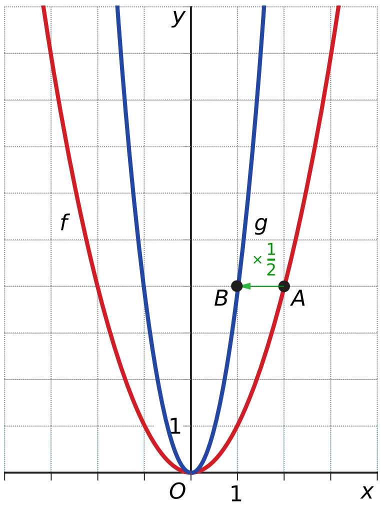
De grafiek van $g(x) = f(2x) = (2x)^2$ ontstaat uit die van f door herschalen in de x-richting met factor $\frac{1}{2}$.

Je ziet in de grafiek bijvoorbeeld dat de x-coördinaat van punt B 1 is en dat is een $\frac{1}{2}$ keer zo groot als de x-coördinaat van punt A.

Stel dat $f(x) = x^2 - 2x$, dan geldt:

$g(x) = f(2x) = (2x)^2 - 2 \cdot 2x$. Let op de haakjes! Je vervangt dus elke x in de formule door $2x$. Eventueel kun je daarna de haakjes weer wegwerken: $(2x)^2 - 2 \cdot 2x = 4x^2 - 4x$.

Algemeen geldt: de grafiek van $g(x) = f(c \cdot x)$ ontstaat uit die van f door herschalen in de x-richting met factor $\frac{1}{c}$.



Figuur 8

Opgave 4

Gegeven is de functie $f(x) = x^3$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $y_2 = f(2x)$ op. Plot de grafiek van y_2. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $y_3 = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van y_3. Hoe ontstaat de grafiek van y_3 uit die van f?

Opgave 5

Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 4x$.

a Plot de grafiek van f.

b Schrijf het functievoorschrift van $y_2 = f(2x)$ op. Plot de grafiek van y_2. Hoe ontstaat de grafiek van y_2 uit die van f?

c Schrijf het functievoorschrift van $y_3 = 2 \cdot f(x)$ op. Plot de grafiek van y_3. Hoe ontstaat de grafiek van y_3 uit die van f?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Verschuiven en herschalen

Door welke verschuivingen en/of herschalingen is de functie $g(x) = 3 \cdot (x - 7)^2 + 4$ ontstaan uit de standaardfunctie $f(x) = x^2$?

Opgave 6

Geef bij elk van de volgende functies aan welke verschuivingen en/of vervormingen je moet toepassen om de grafiek uit die van f te laten ontstaan. (Let op de volgorde!)

a $g(x) = 2 \cdot f(x) + 3$

b $h(x) = f(x - 4) + 2$

c $k(x) = -f(x) + 2$

d $l(x) = f(3x) + 2$

e $m(x) = 2 \cdot f(x - 1) + 4$

Opgave 7

Schrijf het functievoorschrift op van g als de grafiek uit die van f ontstaat door:

a herschalen in de y-richting met -2 en dan 1 in de y-richting verschuiven;

b herschalen in de x-richting met factor 2 en dan -3 in de y-richting verschuiven;

c verschuiven in de x-richting met 4 en verschuiven in de y-richting met -2;

d herschalen in de x-richting met factor $\frac{1}{2}$ en dan een verschuiving in de x-richting van 4;

e verschuiving van 4 in de x-richting, dan herschalen in de y-richting met factor 0,5 en ten slotte verschuiving van -2 in de y-richting.

Voorbeeld 4

Als je een grafiek op de grafische rekenmachine wilt maken, dan moet je geschikte vensterinstellingen geven. Dan kan het nuttig zijn om te zien dat een bepaalde functie door verschuiven en/of herschalen kan ontstaan uit een veel eenvoudiger standaardfunctie. Zeker als je van die standaardfunctie alle karakteristieken weet.

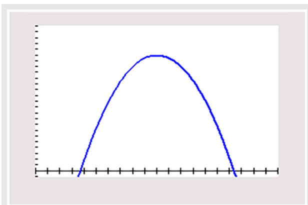
Hoe breng je de grafiek van $f(x) = 200 - 5(x - 30)^2$ goed in beeld?

Antwoord

Je herkent dan de functie als $f(x) = -5(x - 30)^2 + 200$ met als bijbehorende standaardfunctie $y = x^2$. Die basisfunctie heeft als grafiek een dalparabool met top (0,0). De grafiek van f ontstaat uit die van $y = x^2$ door:

- een verschuiving van 30 ten opzichte van de y-as;
- een herschaling met factor -5 ten opzichte van de x-as;
- een verschuiving van 200 ten opzichte van de x-as.

De top van de grafiek van f is daarom (30,200) en de grafiek is een bergparabool.



Figuur 9

De grafiek van $y = x^2$ is goed in beeld met venster $-10 \leq x \leq 10$ en $-10 \leq y \leq 10$. Op dit venster kun je ook de beschreven verschuivingen toepassen. De grafiek van f is daarom goed in beeld als $20 \leq x \leq 40$ en $-10 \leq y \leq 250$.

Opgave 8

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}25(x-5)^4 - 10$. De grafiek van deze functie kan door verschuiven en/of herschalen ontstaan uit die van de bijbehorende standaardfunctie.

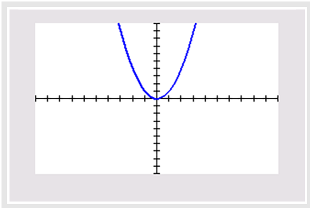
a Welke standaardfunctie is dat?

b Welke verschuivingen en/of vervormingen moeten er dan achtereenvolgens worden toegepast?

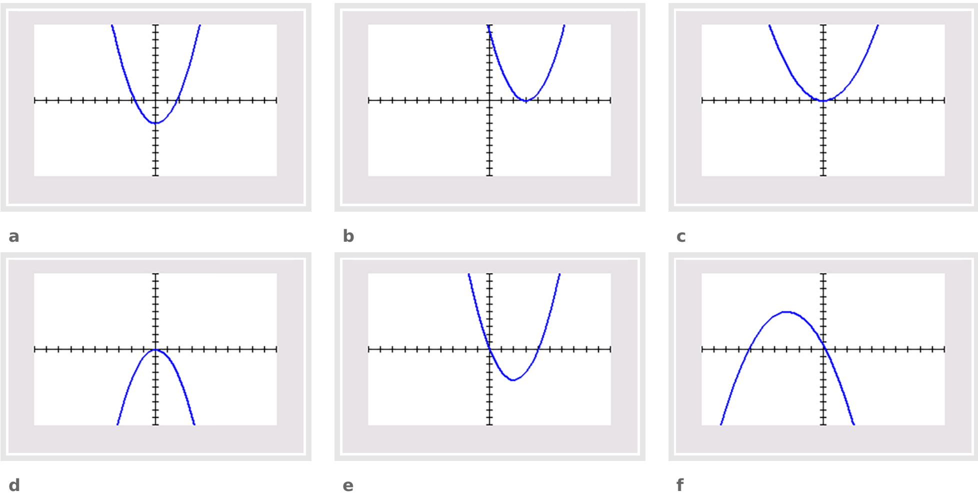
c Bepaal nu het minimum van de grafiek van de gegeven functie. Voor welke waarde van x treedt dit minimum op?

Opgave 9

Je ziet hier de grafiek van $y_1 = x^2$ in de standaardinstellingen van het venster van de rekenmachine. Bekijk de zes grafieken in de standaardinstellingen van het venster van de grafische rekenmachine. Ze zijn allemaal ontstaan uit vervorming van de grafiek van y_1.



Figuur 10



Figuur 11

Geef bij elke grafiek aan welke transformatie er is toegepast. Schrijf ook het juiste functievoorschrift op.

Opgave 10

De grafiek van de functie f met $f(x) = (x-20)^2 + 200$ komt met de standaardinstellingen van het venster op de grafische rekenmachine niet in beeld.

Leg uit hoe je door het toepassen van verschuivingen de vensterinstellingen in één keer zo kunt maken, dat die grafiek wel goed in beeld komt.

Verwerken

Opgave 11

Ga uit van de standaardfunctie $f(x) = 2x^2$. De grafieken van de onderstaande functies kun je door verschuiven en/of herschalen van deze standaardfunctie krijgen. Geef bij elk van die functies aan welke verschuivingen en/of herschalingen dat zijn en geef de bijbehorende formules.

a $y_2 = 0{,}5 \cdot f(x)$

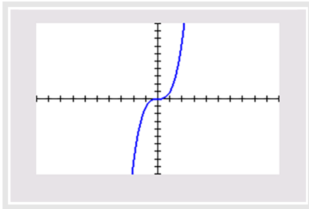
b $y_3 = f(x-4) + 2$

c $y_4 = 2 - f(x)$

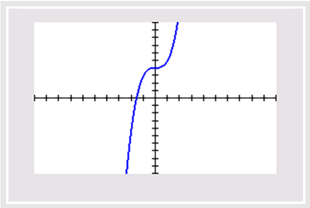
d $y_5 = f(3x) - 4$

Opgave 12

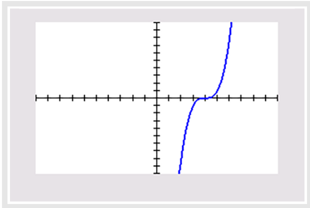
Hier zie je vijf keer het venster van de grafische rekenmachine in de basisinstellingen. Deze basisgrafiek is die van $y_1 = x^3$. De overige grafieken zijn door verschuiven en/of herschalen van die grafiek ontstaan.



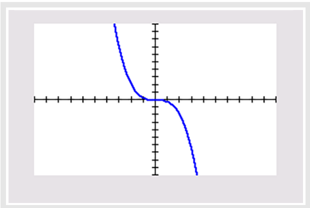
Figuur 12



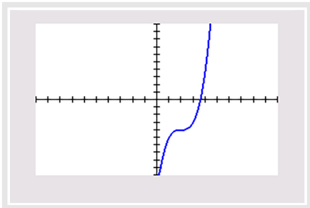
a



b



c



d

Figuur 13

Geef bij elke functie het juiste voorschrift.

Opgave 13

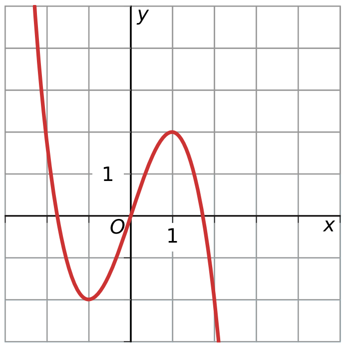
Hier en op het **werkblad** zie je de grafiek van $y_1 = f(x)$.
Teken de grafieken van de volgende functies. Schrijf erbij welke verschuivingen en/of herschalingen je toepast.

a $y_2 = f(x - 2)$

b $y_3 = -2 \cdot f(x)$

c $y_4 = f(x) - 2$

d $y_5 = f(2x) - 1$



Figuur 14

Opgave 14

Een weggeslingerde kogel beschrijft ten opzichte van een xy-assenstelsel de volgende baan: $y = -0{,}02(x - 10)^2 + 4$. Het moment van loslaten ligt op $y = 2$. Dit is bij $x = 0$. y en x zijn beide in meter uitgedrukt.

a Geef geschikte vensterinstellingen zodat je de volledige baan van de kogel op de grafische rekenmachine in beeld kunt krijgen.

b Bereken hoe ver deze kogelstoter met zijn kogel komt. Geef je antwoord in centimeter nauwkeurig.

c Na hoeveel meter is de kogel weer even hoog als op het moment van loslaten?

Opgave 15

Gegeven is de standaardfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.

a De grafiek van y_1 ontstaat door op de grafiek van f een verschuiving van 2 'omlaag' en verschuiving van 5 naar 'rechts' toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_1 en het domein en bereik daarvan.

b De grafiek van y_2 ontstaat door de grafiek van f eerst te herschalen met factor 2 in de y-richting, vervolgens een verschuiving van 3 in de x-richting en tot slot verschuiving van -4 in de y-richting toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_2 en het domein en bereik daarvan.

c De grafiek van y_3 ontstaat door de grafiek van f eerst te herschalen met factor $-\frac{1}{2}$ in de x-richting, vervolgens verschuiving van 2 in de x-richting toe te passen en tot slot verschuiving van 4 in de y-richting toe te passen. Geef het functievoorschrift van y_3 en het domein en bereik daarvan.

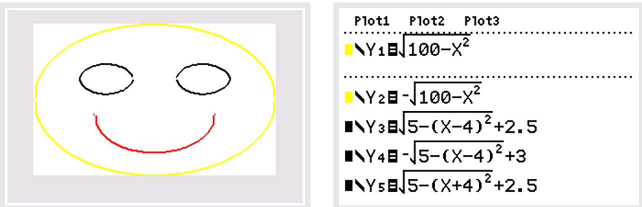
Toepassen

Opgave 16: Smiley maken

Door gebruik te maken van de juiste functies (en vervormingen en verschuivingen) kun je smiley's maken op je grafische rekenmachine. Dat is best een aardige sport en nog leerzaam ook... De smiley hieronder bestaat uit een aantal (soms vervormde en verschoven) halve cirkels. Omdat voor elk punt (x,y) op een cirkel om de oorsprong $O(0,0)$ met straal 10 geldt: $x^2+y^2=100$, noem je dit wel de vergelijking van deze cirkel. Om de grafische rekenmachine te kunnen gebruiken zet je de vergelijking om in een functievoorschrift, eigenlijk in twee functievoorschriften. Ga na, dat: $y=\pm\sqrt{100-x^2}$.

Deze formules zijn gebruikt om de buitenste cirkel (twee halve cirkels) van de smiley te maken, zoals je ziet. De andere halve cirkels krijg je door de straal kleiner te maken en verschuiven en herschalen toe te passen. Ten slotte zet je het assenstelsel uit.

Maak zelf een smiley en laat een medeleerling bedenken welke formules je hebt gebruikt (voordat je het assenstelsel uitzet). Doe daarna het omgekeerde.



Figuur 15

Opgave 17: Winstfunctie

In een bepaald economisch model komt de winstfunctie $TW = -0{,}01q^2 + 4q$ voor. Hierin is q het aantal verkochte exemplaren van een bepaald artikel en TW de winst in duizenden euro.

Gebruik de nulpunten om het maximum van deze functie te bepalen. Beredeneer daarna welke vensterinstellingen geschikt zijn om de grafiek van TW te plotten.

Testen

Opgave 18

Bekijk de grafiek van de functie $f(x)=\frac{1}{x}$.

Welke verschuivingen en/of herschalingen moet je toepassen om de grafiek te krijgen van de volgende functies? Schrijf ook het bijbehorende functievoorschrift op.

a $y_2 = f(x-3)$

b $y_3 = 0{,}5 \cdot f(x) + 1$

c $y_4 = f(3x)$

Opgave 19

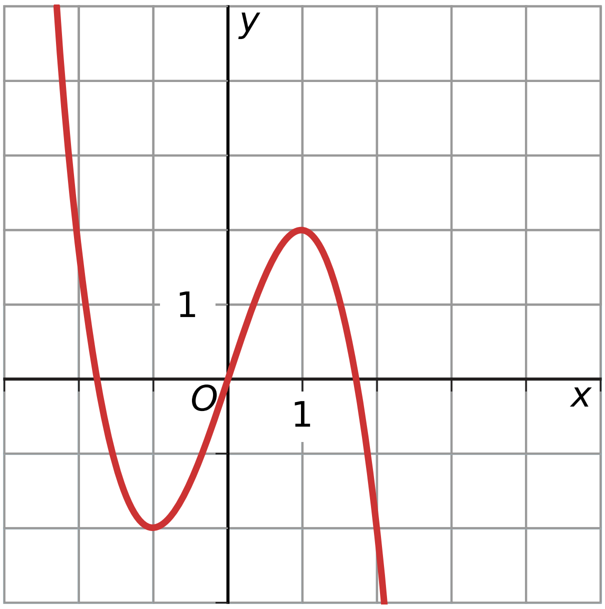
Om de grafiek van $f(x) = 10\sqrt{x} + 50$ goed in beeld te krijgen op de grafische rekenmachine, moet je weten hoe deze ontstaat door verschuiving en/of herschalen van de bijbehorende standaardfunctie.

a Welke standaardfunctie is dat?

b Welke verschuiving en/of herschaling moet je op de grafiek van de standaardfunctie toepassen?

c Schrijf op bij welke vensterinstellingen de grafiek van f goed in beeld komt.

Werkblad bij **Opgave 13 op pagina 8**



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.