2.4 Karakteristieken

Inleiding

Om functies te kunnen bestuderen is het vaak handig als je bijbehorende grafieken kunt bekijken. Je wilt dan alle snijpunten met de assen, toppen etcetera kunnen zien. Je leert deze karakteristieken vinden.

Je leert in dit onderwerp

- wat asymptoten zijn;
- de karakteristieken van (de grafiek van) een functie te bepalen.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken en tabellen van functies maken (ook met de grafische rekenmachine);
- het domein en het bereik van een functie opschrijven.

Verkennen

Opgave V1

De huurprijs van een kopieerapparaat bedraagt € 250,00 per maand. Het maken van een kopie kost € 0,06. Op school staat zo'n apparaat voor de leerlingen. Zij betalen € 0,10 per kopie.

a Geef een formule voor de kosten per kopie (K) als functie van het aantal kopieën (a).

b Welke waarde benaderen de functiewaarden als a heel groot wordt?

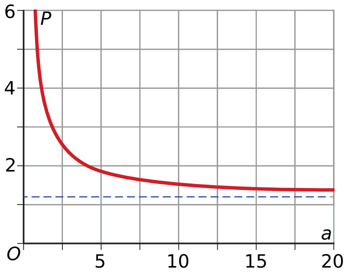
c En als a dicht bij 0 komt?

Uitleg

Voor een rit in een taxi betaal je:

- voorrijkosten € 3,20
- per gereden kilometer € 1,20

De prijs P per gereden km hangt af van het aantal gereden km a. Er geldt: $P = 1{,}20 + \frac{3{,}20}{a}$.



Figuur 1

De grafiek van deze functie heeft geen nulpunten of extremen, maar wel geldt:

- Als a (het aantal gereden kilometers) heel groot wordt, benaderen de functiewaarden het getal 1,20. Met de grafische rekenmachine kun je een tabel maken en dan zie je dat hoe groter a is hoe dichter je bij 1,20 komt. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $P = 1{,}20$ komt te liggen, maar deze niet raakt. Deze lijn heet de horizontale asymptoot van de grafiek van P.
- Aan de functie zie je dat je het getal 0 niet voor a mag invullen: delen door 0 kan niet. Waarschijnlijk is daar dus ook iets bijzonders. Als a dicht bij 0 komt, worden de functiewaarden steeds groter: $P(0{,}1) = 33{,}20$; $P(0{,}01) = 321{,}20$; $P(0{,}001) = 3201{,}20$; $P(0{,}0001) = 32001{,}20$ enzovoort. Dit betekent dat de grafiek steeds dichter bij de lijn $a = 0$ (de verticale as) komt te liggen. Dit is de verticale asymptoot van de grafiek van P.

Als je de grafiek van de functie tekent, zorg je ervoor dat ook dit soort karakteristiek gedrag zichtbaar wordt, net als snijpunten met de assen en toppen (als ze er zijn).

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**. Voor een taxirit van taxicentrale Bob betaal je € 5,00 voorrijkosten en € 1,10 per gereden kilometer a.

a Stel de formule op voor de kosten K (in euro) per gereden kilometer voor deze taxirit.

b Wat zijn de asymptoten van de grafiek van K?

c Bij taxicentrale Alice kun je alleen maar ritten maken die langer zijn dan 2 km. Bij deze taxicentrale wordt de formule $K = 1{,}15 + \frac{5}{a-2}$ gehanteerd. Wat zijn de asymptoten van de grafiek van deze formule?

Opgave 2

Van een bepaald type kopieerapparaat worden de kosten per kopie gegeven door $K(a) = \frac{200}{a} + 0{,}075$. Hierin is a het aantal kopieën per maand en K zijn de kosten in euro.

a Bereken de kosten per kopie als er 10000 kopieën per maand met deze machine worden gemaakt.

b Welke waarde benaderen de kosten per kopie als het aantal kopieën heel erg groot is?

c Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van K?

d Als er een bepaalde maand geen kopieën worden gemaakt, kun je niet spreken van de kosten per kopie. Het minimale aantal kopieën waarbij dit nog wel kan, is één. Hoeveel bedragen de kosten per kopie maximaal?

Theorie en voorbeelden

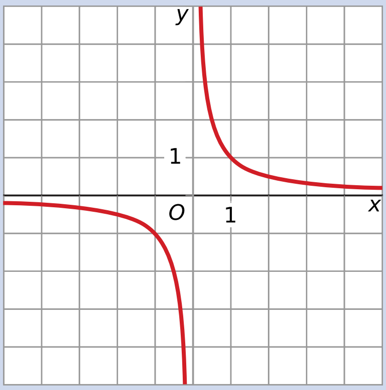
Om te onthouden

Bij grafieken komt regelmatig **asymptotisch gedrag** voor: als je ver genoeg van de oorsprong komt, gaat de grafiek steeds dichter in de buurt van een lijn lopen.

Een **verticale asymptoot** in een grafiek kun je vaak goed in de functie herkennen: een invoerwaarde waarbij je door 0 moet delen, veroorzaakt vaak zo'n asymptoot.

Een **horizontale asymptoot** in een grafiek ontstaat als de functiewaarden een vast getal naderen naarmate de invoerwaarden heel groot of heel klein (erg negatief) worden.

De functie f met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ heeft een grafiek met asymptoten. Deze grafiek heeft:



Figuur 2

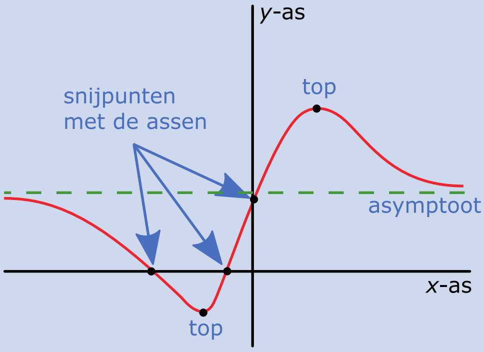
- als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$, want voor grote en kleine (erg negatieve) waarden van x naderen de functiewaarden naar 0;
- als verticale asymptoot de lijn $x = 0$, want dit getal heeft geen functiewaarde (je kunt niet door 0 delen) en vlak in de buurt van 0 worden de functiewaarden heel groot of heel klein (erg negatief).

Het domein van f zijn alle getallen behalve 0: $D_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

Het bereik van f zijn alle getallen behalve 0: $B_f = \langle \leftarrow, 0\rangle \cup \langle 0, \rightarrow\rangle$.

Als je de grafiek van een functie goed in beeld hebt, zijn alle **karakteristieken** zichtbaar (op het gewenste domein). Dat kunnen zijn:

- de **snijpunten met de assen**;
- de **asymptoten**;
- de **toppen**.

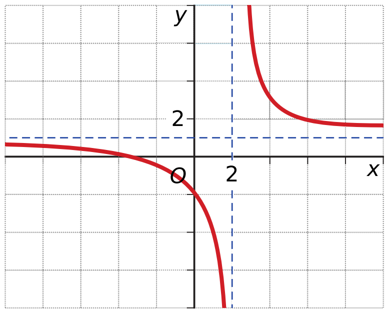


Figuur 3

Voorbeeld 1

Bekijk de applet

De grafiek van $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ heeft twee asymptoten. Welke twee? Schrijf het domein en bereik van f op.



Figuur 4

Antwoord

Aangezien je niet door 0 kunt delen is er iets bijzonders als $x-2=0$ en dus als $x=2$. $f(2)$ bestaat niet, maar x-waarden vlak bij 2 kun je wel invullen: $f(2{,}001) = 6001$ en $f(2{,}0001) = 60001$, enzovoort. Verder is $f(1{,}999) = 5999$ en $f(1{,}9999) = 59999$.
De grafiek van f komt steeds dichter langs de lijn $x=2$ te lopen. $x=2$ is de vergelijking van de verticale asymptoot.

Voor de horizontale asymptoot ga je anders te werk. Kies x-waarden als 1000, 10000, 100000, enzovoort. Bereken de bijbehorende functiewaarden. Doe hetzelfde met -1000, -10000, -100000, enzovoort. Je ziet dan dat de functiewaarden steeds dichter in de buurt van $y=1$ liggen. Hoe verder je van 0 af zit, hoe beter die benadering. De lijn $y=1$ is de horizontale asymptoot van de grafiek van f.
Het domein van f is: $\langle \leftarrow, 2\rangle \cup \langle 2, \rightarrow\rangle$. Het bereik van f is: $\langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 1, \rightarrow\rangle$.

Opgave 3

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4}{x} + 2$.

a Maak de grafiek van f met de grafische rekenmachine. Gebruik de standaardinstellingen van het venster.

b Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek? Hoe zie je dat aan de tabel van f?

c Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

d Welk getal naderen de functiewaarden als x heel klein wordt?

e Wat is de vergelijking van de horizontale asymptoot?

f Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 4

Je ziet de grafiek van de functie f met $f(x) = \frac{4}{x+2}$.

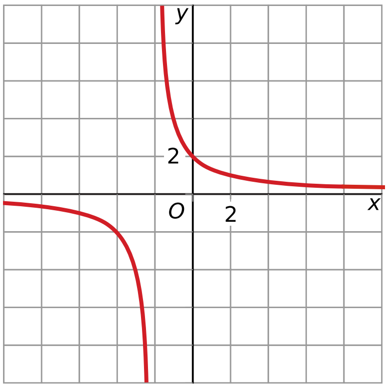
a Welke verticale asymptoot heeft deze grafiek?

b Welk getal naderen de functiewaarden als x heel groot wordt?

c Welk getal naderen de functiewaarden als x heel klein wordt?

d Welke vergelijking heeft de horizontale asymptoot?

e Schrijf het domein en het bereik van f op.



Figuur 5

Opgave 5

Gegeven is de functie $g(x) = \frac{x-5}{x+10}$.

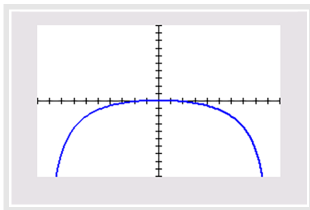
a Welke asymptoten heeft de grafiek van g?

b Geef het domein en bereik van g.

Voorbeeld 2

Dit is een grafiek van de functie $f(x) = \frac{4x^2-16}{x^2-100}$.

Hij is gemaakt met de grafische rekenmachine met het standaardvenster. Bepaal alle karakteristieken en het bereik van f.



Figuur 6

Antwoord

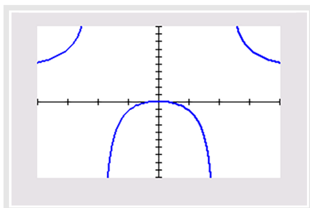
Op grond van dit plaatje zou je verkeerde conclusies kunnen trekken. Bijvoorbeeld dat het maximum $f(0) = 0$ is. En dat de grafiek een soort afgeplatte bergparabool is. Dat is niet goed.

Eerst kijk je of er nulpunten en asymptoten zijn:

- $f(x) = 0$ levert op: $\frac{4x^2-16}{x^2-100} = 0$ en dus: $4x^2 - 16 = 0$.
  Er zijn daarom twee nulpunten: $x = -2$ en $x = 2$.
- Je deelt door $x^2 - 100$ en dus ontstaan er problemen als $x^2 - 100 = 0$.
  Dit betekent dat $x = 10$ en $x = -10$ misschien verticale asymptoten zijn. Door getallen dicht in de buurt van 10 dan wel -10 in te vullen, merk je dat dit echt twee verticale asymptoten zijn.
- Als je grote getallen (of grote negatieve getallen) invult naderen de functiewaarden 4. Dus $y = 4$ is de horizontale asymptoot.

Pas nu de vensterinstellingen aan en breng alle karakteristieken van de grafiek in beeld. Bij $x = 10$ blijkt een maximum te zitten: $f(0) = 0{,}16$. (Laat de rekenmachine een maximum zoeken tussen bijvoorbeeld de nulpunten.)

Het bereik van f lees je uit de grafiek af, rekening houdend met het maximum en de horizontale asymptoot: $B_f = \langle \leftarrow; 0{,}16 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.



Figuur 7

Opgave 6

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{2x^2-12}{x^2-25}$.

a Plot de grafiek van f. Welke vensterinstellingen heb je gebruikt?

b Geef de karakteristieken van f.

c Geef het domein en het bereik van f.

Opgave 7

Gegeven is de functie g met $g(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

a Waarom heeft de grafiek van deze functie geen verticale asymptoot?

b Welk nulpunt heeft de grafiek van g?

c Onderzoek of de grafiek van g een horizontale asymptoot heeft.

d Geef het domein en het bereik van g.

Verwerken

Opgave 8

Geef het domein, het bereik en de asymptoten van de volgende functies.

a $f(x) = 4 - \frac{4}{x}$

b $g(x) = \frac{4-x}{x}$

c $h(x) = \frac{x}{x^2-4}$

d $k(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$

Opgave 9

In een natuurgebied zijn er herten uitgezet. Het aantal herten kan bepaald worden met de formule $N = 150 - \frac{60}{1+0{,}1t}$. Hierin is N het aantal herten en t het aantal jaar na het uitzetten van de herten.

a Hoeveel herten zijn er uitgezet?

b Welke asymptoot hoort bij de grafiek van deze formule?

c Wat is de betekenis van de asymptoot in deze praktijksituatie?

d Na hoeveel jaar zijn er 120 herten?

Opgave 10

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{-5x^2}{(x-10)^2}$.

a Bereken de nulpunten van deze functie.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f.

Opgave 11

Voor de totale kosten (TK) bij de productie van een bepaald artikel geldt: $TK = 100 + 0{,}1q^2$ waarin q het aantal exemplaren voorstelt.

a Bereken de gemiddelde kosten per exemplaar bij een productie van 120 stuks op twee decimalen nauwkeurig.

b Leg uit waarom de gemiddelde kosten het hellingsgetal zijn van de lijn door $(0,0)$ en (q, TK).

c Stel een functie op voor de gemiddelde kosten per exemplaar (GTK) als functie van q.

d Welke asymptoot heeft de functie GTK? Schrijf het domein en het bereik van GTK op.

Toepassen

Opgave 12: Toonhoogte

De toonhoogte van geluid wordt bepaald door de frequentie. Hoe hoger de frequentie, hoe kleiner de golflengte wordt. De frequentie wordt uitgedrukt in hertz (Hz) en geeft het aantal trillingen per seconde aan. Weet je de frequentie f, dan kun je de golflengte W berekenen: $W = \frac{330}{f}$. 330 is de zogenaamde voortplantingssnelheid van de golf in meter per seconde. Een geluidsinstallatie kan geluiden van 15 Hz tot 30000 Hz produceren.

a Als je [15,30000] als domein kiest, welk bereik heeft W dan?

b Vleermuizen kunnen soms wel geluiden met een frequentie van 120000 Hz horen. Is dit een hoog of juist laag geluid?

c Welke golflengte heeft dat geluid?

d Mensen kunnen geluiden onder de 20 Hz nauwelijks horen. Gaat het dan om bassen of hoge tonen?

e Welke golflengte heeft zo’n geluid?

f Tot welke waarde nadert W als f heel groot wordt?

Opgave 13: Zuurstofgehalte

Door een technische storing in de airconditioning van een groot gebouw neemt het zuurstofgehalte in de lucht tijdelijk af. De technische staf heeft het verloop van het zuurstofgehalte beschreven met de formule: $Z(t) = 200\left(1 - \frac{10}{t+10} + \frac{100}{t+10^2}\right)$.

Hierin is t de tijd in minuten gerekend vanaf het moment dat de storing begon. Verder is Z het aantal cm^3 zuurstof per liter lucht op het tijdstip t. Op $t = 0$ is het zuurstofgehalte normaal.

a Bereken $Z(0)$. Schets de grafiek van $Z(t)$ voor $0 \leq t \leq 100$.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van $Z(t)$? Welke betekenis hebben ze?

c Op welk tijdstip is het zuurstofgehalte minimaal?

d De medische staf vindt een zuurstofgehalte van 80% van het normale niveau, nog juist toelaatbaar. Bereken gedurende hoeveel minuten het zuurstofgehalte ontoelaatbaar laag is.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{4+2x}{x-1}$.

a Bereken $f(100)$ en $f(\text{-}100)$ op vier decimalen nauwkeurig.

b Bereken de nulpunten van de grafiek van f.

c Breng de grafiek van f in beeld.

d Schrijf de vergelijkingen van de asymptoten van de grafiek van f op.

e Schrijf het domein en het bereik van f op.

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $f(x) = \frac{x^2}{x^4+10}$.

a Bereken de nulpunten van de grafiek van deze functie.

b Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

c Bij welke vensterinstellingen is de grafiek van f goed in beeld met alle karakteristieken zichtbaar?

d Bepaal het bereik van f. (Benaderingen op twee decimalen nauwkeurig.)

Opgave 16

In een biologisch laboratorium is onderzoek gedaan naar de tijd die zaden nodig hebben om voor 50% te ontkiemen. Proefondervindelijk is een verband tussen temperatuur en kiemtijd gebleken. De kiemtijd K is geteld in dagen en de temperatuur T is gemeten in °C. Dit verband wordt gegeven door: $K = \frac{89}{T-2}$.

a Boven welke temperatuur is de helft van de zaden al binnen 10 dagen ontkiemd?

b Wat is een zinvol domein voor K als functie van T?

c Welke asymptoten heeft de grafiek van deze functie?

d Welk bereik hoort bij het gekozen domein?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.