2.3 Bijzondere functies

Inleiding

Je kent al diverse functies. Alleen sprak je tot nu toe vaak over verbanden en formules. Denk nog even terug aan de lineaire verbanden, de kwadratische verbanden en de hyperbolische verbanden. Het gaat daarbij eigenlijk steeds over functies. In dit onderdeel komen enkele veelgebruikte functies voorbij.

Je leert in dit onderwerp

- werken met lineaire functies;
- werken met kwadratische functies.

Voorkennis

- het begrip functie en de bijbehorende notaties gebruiken;
- het domein en het bereik van een functie vinden;
- de intervalnotatie gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

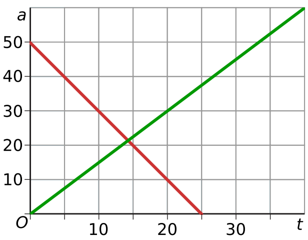
Je staat op een viaduct over de snelweg A1. Je ziet een auto rijden met een snelheid van 90 km/h. Precies 6 minuten later zie je een tweede auto onder het viaduct uitkomen. Deze tweede auto rijdt 120 km/h en in dezelfde richting als de eerste auto.

a Teken bij elk van deze auto's de grafiek van de afstand tot het viaduct. Zet beide grafieken in één figuur en kies geschikte eenheden.

b Na hoeveel minuten heeft de tweede auto de eerste ingehaald? (Gebruik je grafieken of geef een berekening.)

Uitleg

Twee auto's rijden met een constante snelheid over dezelfde weg. A en B liggen aan deze weg 50 km van elkaar.
Auto 1 gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 km/h en auto 2 rijdt van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h. Beide auto's zijn op hetzelfde moment vertrokken. Als je wilt berekenen op welk tijdstip ze elkaar tegenkomen, neem je (bijvoorbeeld) voor de afstand tot A de variabele a. Neem voor de tijd in minuten de variabele t.



Figuur 1

Omdat auto 1 met 1,5 km per minuut rijdt, geldt: $a_1 = 1{,}5t$.
Omdat auto 2 met 2 km per minuut rijdt, geldt: $a_2 = 50 - 2t$.

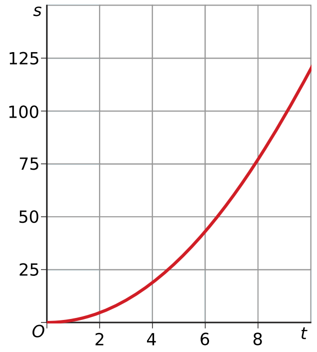
Bij beide formules is er een lineair verband tussen a en t: a_1 en a_2 zijn lineaire functies. Beide grafieken zijn rechte lijnen.

De auto's komen elkaar tegen wanneer $1{,}5t = 50 - 2t$. Als je deze vergelijking oplost, vind je $t \approx 14{,}3$ minuten.

Vaak kun je de afgelegde afstand van een auto berekenen door aan te nemen dat hij voortdurend met dezelfde (gemiddelde) snelheid heeft gereden. Maar als een auto optrekt, neemt zijn (gemiddelde) snelheid tijdens het optrekken toe. De afgelegde afstand neemt dan niet lineair toe.

In de grafiek zie je de afgelegde afstand van s (in meter) van een auto die vanuit stilstand optrekt, waarbij t de tijd (in seconden) is. Hier is een kwadratisch verband gekozen, waarbij de functie: $s(t) = 1{,}2t^2$ hoort.

Na 5 seconden heeft de auto 30 meter afgelegd. De gemiddelde snelheid is 6 m/s, dus ongeveer 22 km/h. Na 10 seconden heeft de auto 120 meter afgelegd. De gemiddelde snelheid is 12 m/s, dus ongeveer 44 km/h. Je ziet dat de gemiddelde snelheid toeneemt.



Figuur 2

Opgave 1

In de **Uitleg** rijden twee auto’s met een constante snelheid over dezelfde weg. Auto 1 gaat van A naar B met een constante snelheid van 90 km/h en auto 2 van B naar A met een constante snelheid van 120 km/h.

a De afstand van beide auto’s tot A wordt bekeken. Bekijk die afstand nu vanuit B. Schrijf de twee bijpassende formules op.

b Bereken na hoeveel seconden de auto's elkaar tegenkomen.

c Voor welke twee waarden van t bedraagt de onderlinge afstand van beide auto's 20 km?

Opgave 2

In het tweede deel van de **Uitleg** zie je de kwadratische formule: $s = 1{,}2t^2$.
Deze formule gaat over een vanuit stilstand optrekkende auto, waarbij s de afgelegde afstand (in meter) en t de tijd (in seconden) is.

a Hoe zie je aan de grafiek dat de snelheid steeds toeneemt?

b Na hoeveel seconden heeft de auto 100 meter afgelegd?

c Na hoeveel seconden is de gemiddelde snelheid ongeveer 60 km/h?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

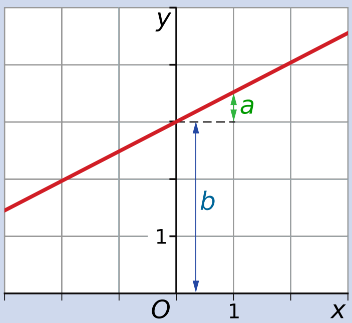
Bekijk de applet: lineaire functies

Een verband tussen y en x van de vorm $y = ax + b$ is een **lineair verband**. x en y zijn dan (veranderende) variabelen, terwijl a en b (vaste) getallen zijn.

Omdat er bij elke waarde voor x niet meer dan één y-waarde hoort, is $f(x) = ax + b$ een **lineaire functie**.

- a noem je de **richtingscoëfficiënt**;
- b is de functiewaarde bij $x = 0$. En dat is weer de y-coördinaat van het snijpunt $(0,b)$ van de grafiek met de y-as.

Lineair komt van “linéaire” (Frans) en “linearis” (Latijn) en betekent lijnvormig. De grafiek van een lineaire functie is een rechte lijn. Een ander woord voor lineaire functie is **eerstegraadsfunctie**.

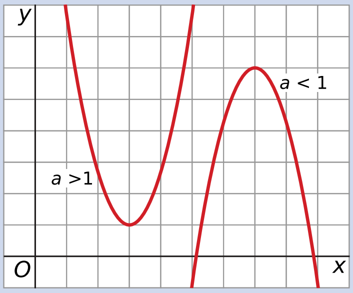


Figuur 3

Bekijk de applet: kwadratische functies

Een functie van de vorm $g(x) = ax^2 + bx + c$ is een **tweedegraadsfunctie** of **kwadratische functie**. Als a hier een positief getal is, dan is de bijbehorende grafiek een dalparabool en als a een negatief getal is, dan is de bijbehorende grafiek een bergparabool.

Opmerking: Op deze manier kun je doorgaan: $h(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ is een derdegraadsfunctie, enzovoort. Er bestaan dus veel verschillende functies.



Figuur 4

Voorbeeld 1

Soms gaan economen uit van een lineair verband tussen het aantal producten q dat wordt verkocht en de prijs p die ervoor wordt gevraagd. q is dan een lineaire functie van p. Een voorbeeld daarvan is een functie met voorschrift $q = 4000 - 200p$.
Welke prijzen kan de fabrikant volgens dit model vragen? En welke aantallen kan hij verkopen?

Antwoord

Zowel p als q moeten positieve waarden hebben. Neem je $p = 0$, dan is $q = 4000$. Neem je $q = 0$, dan is $p = 20$ (vergelijking oplossen). Dit betekent dat p van 0 tot 20 kan lopen en q van 0 tot 4000. Handig om van tevoren te bedenken als je de grafiek op de grafische rekenmachine in beeld wilt brengen.

Opgave 3

In **Voorbeeld 1** zie je de formule $q = 4000 - 200p$ van een economisch model.

a Plot de grafiek van de formule. Welke vensterinstellingen gebruik je?

b Hoe kun je aan de grafiek zien dat er sprake is van een lineair verband en wat is de richtingscoëfficiënt?

c Bij welke prijs verkoopt hij 1500 exemplaren?

Opgave 4

Voor een rit in een taxi betaal je voorrijkosten en een bedrag per gereden kilometer:

- voorrijkosten € 3,20;
- per gereden kilometer € 1,20.

De ritprijs (R) hangt af van het aantal gereden kilometers (a).

a Laat zien dat $R(10) = 15{,}2$.

b Stel een voorschrift op voor de functie $R(a)$.

c Dit is een voorbeeld van een lineaire functie. Teken de grafiek van deze functie op de grafische rekenmachine.

d Waar vind je de twee getallen 3,20 en 1,20 in je grafiek terug?

Opgave 5

Elke lineaire functie f heeft een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$. Neem aan dat de grafiek door (0,3) en (1; 3,5) gaat.

a Welke betekenis heeft a voor de grafiek van f? Welke waarde heeft a in dit geval?

b Welke betekenis heeft b voor de grafiek van f? Welke waarde heeft b in dit geval?

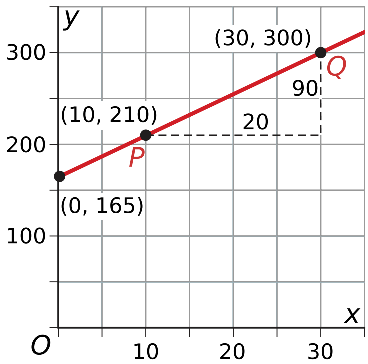
c Welke waarden voor a en b moet je nemen om als grafiek een rechte lijn door $A(1,2)$ en $B(5,3)$ te krijgen?

d Hoe kun je het bijbehorende functievoorschrift afleiden uit de coördinaten van A en B?

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Je ziet de punten $P(10,210)$ en $Q(30,300)$. Stel een functievoorschrift op voor de functie waarvan de grafiek een rechte lijn is die door de punten P en Q gaat.



Figuur 5

Antwoord

Er is sprake van een lineaire functie f met $f(x) = ax + b$.
Je zoekt daarom het hellingsgetal (a) en het begingetal (b). b is de functiewaarde bij $x = 0$.
Vergelijk de twee gegeven punten van de grafiek.
Bij een toename van x met $30 - 10 = 20$ hoort een toename van y met $300 - 210 = 90$. Dus bij een toename van x met 1 hoort een toename van y met $\frac{90}{20} = 4{,}5$. Daarom is het hellingsgetal 4,5.

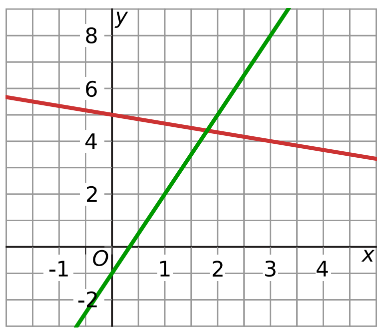
De functiewaarde bij 0 is niet bekend.
De functie heeft een voorschrift als $f(x) = 4{,}5x + b$.
Omdat $f(10) = 210$ geldt: $210 = 4{,}5 \cdot 10 + b$. En dit geeft $b = 165$.
Dus het functievoorschrift is $f(x) = 4{,}5x + 165$.

Opgave 6

Stel een functievoorschrift op voor de functie waarvan de grafiek een rechte lijn is die door de punten $P(-2,10)$ en $Q(6,82)$ gaat.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je het voorschrift opstelt van een lineaire functie als twee punten van de grafiek zijn gegeven. Je ziet twee grafieken van lineaire functies.
Stel voor elk van deze functies een passend voorschrift op en bereken algebraïsch het snijpunt van beide lijnen.



Figuur 6

Voorbeeld 3

Het aantal exemplaren q dat een fabrikant verkoopt, hangt af van de prijs p volgens een lineaire functie: $q = 4000 - 200p$. De totale opbrengst TO bereken je met de formule: $TO = p \cdot q = p \cdot (4000 - 200p)$. TO is een kwadratische functie van p. Bij welke prijs is de opbrengst maximaal en wat is dan de maximale opbrengst?

Antwoord

De nulpunten van TO bereken je door de vergelijking $p \cdot (4000 - 200p) = 0$ op te lossen. Dat levert op: $p = 0 \vee p = 20$.
Voor het bepalen van het maximum van TO kun je de grafiek plotten en de grafische rekenmachine het maximum laten bepalen. Je vindt dan dat er een maximum is bij $p = 10$. Maar je kunt dit ook als volgt beredeneren: de grafiek van TO is een parabool en dus lijnsymmetrisch. Door de vergelijking $p \cdot (4000 - 200p) = 0$ op te lossen, vind je dat de parabool door de punten (0,0) en (20,0) gaat. Het maximum zit in het midden van die punten, dus bij $p = 10$.

Voor de maximale opbrengst, vul je $p = 10$ in de functie $TO(p)$ in. Je vindt $TO(10) = 20000$. Dus bij een prijs van € 10,00 is er een maximale opbrengst van € 20000,00.

Opgave 8

Voorbeeld 3 gaat over een kwadratische functie.

a Laat door het uitwerken van de haakjes zien dat TO inderdaad een kwadratische functie is.

b Waarom is het uitwerken van de haakjes hier niet erg nuttig?

c Breng de grafiek van TO in beeld. Welke vensterinstellingen gebruik je?

d Ga met de rekenmachine na dat de maximale opbrengst inderdaad bij $p = 10$ wordt gevonden. Hoeveel bedraagt die maximale opbrengst?

Opgave 9

Gegeven is $f(x) = 3x(2 - 5x)$.

a Plot de grafiek en geef de vensterinstellingen.

b Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van f met de x-as.

c Geef de coördinaten van de top van de grafiek van f.

Verwerken

Opgave 10

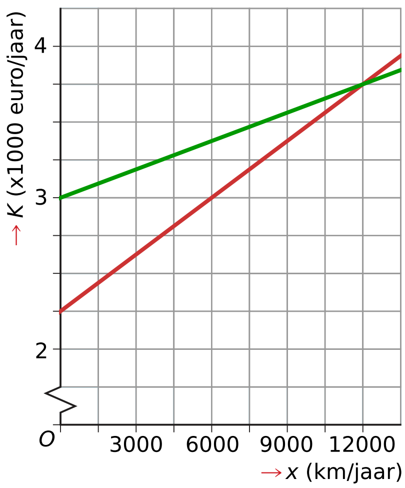
a Stel een voorschrift op van de lineaire functie f waarvan de grafiek door de punten $P(2,80)$ en $Q(8,140)$ gaat.

b Stel een voorschrift op van de lineaire functie g waarvan de grafiek door de punten $R(-5,15)$ en $S(10,-25)$ gaat.

Opgave 11

Je ziet de grafieken van de jaarlijkse kosten van twee verschillende auto's. Auto A (groene grafiek) was duurder in de aanschaf en heeft mede daarom hogere vaste kosten per jaar, maar is per gereden kilometer iets goedkoper.

Stel voor beide auto's een passende formule op voor de jaarlijkse kosten als functie van het aantal gereden kilometers. Vanaf welk aantal gereden kilometers per jaar is het voordeliger om auto A aan te schaffen?



Figuur 7

Opgave 12

Twee cilindervormige kaarsen worden tegelijkertijd aangestoken. Ze branden gelijkmatig op. Een uur na het aansteken heeft kaars I een lengte van 75 cm en is kaars II nog 71 cm lang. 3,5 uur na het aansteken worden beide kaarsen opnieuw gemeten: kaars I is dan 62,5 cm en kaars II is dan nog 61 cm lang.

a Stel voor elk van deze kaarsen een formule op voor de lengte l in centimeter als functie van de brandtijd t in uren.

b Hoeveel uur na het aansteken zijn beide kaarsen even lang?

c Hoeveel uur na het aansteken verschillen ze 1 cm in lengte?

Opgave 13

Een verfhandelaar heeft een mengmachine van € 300,00 aangeschaft. Het mengen van verf kost hem naast deze vaste kosten nog € 6,00 per liter.

a Geef een formule voor de kosten K als functie van het aantal liter verf q dat hij verkoopt.

b Welke waarden kan q aannemen? Welke waarden kan K aannemen?

Hij verkoopt zijn gemengde verf voor € 8,25 per liter. Zijn opbrengst R is ook een functie van q.

c Welke formule geldt voor R?

d Breng beide functies in beeld op de grafische rekenmachine. Bereken het snijpunt van beide grafieken. Welke betekenis heeft dit snijpunt voor de verfhandelaar?

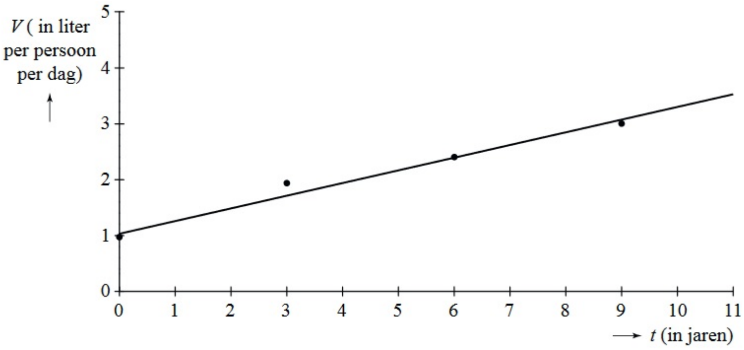
Opgave 14

Tussen de prijs p en het aantal producten dat een fabrikant verkoopt bestaat het verband $q = 300 - 10p$. Bij welke prijs is de opbrengst maximaal?

Toepassen

Opgave 15: Waterverbruik bij vaatwasmachines

Lang niet al het drinkwater wordt gebruikt om te drinken. Een gedeelte van het drinkwater wordt gebruikt voor de vaatwasmachine. Gegevens daarvan staan in de grafiek, waarbij geldt dat 1995 overeenkomt met $t = 0$. In deze grafiek kun je bijvoorbeeld aflezen dat er in 2001 ($t = 6$) gemiddeld over alle Nederlanders ongeveer 2,4 liter water per persoon per dag wordt gebruikt voor vaatwasmachines. Het lijkt erop dat V, het waterverbruik van de vaatwasmachine in liter per persoon per dag, bij benadering lineair toeneemt. Daarom is een lijn getekend die zo goed mogelijk bij de gegevens past. De formule van de lijn is $V = a \cdot t + b$, waarbij t de tijd is in jaren na 1995.



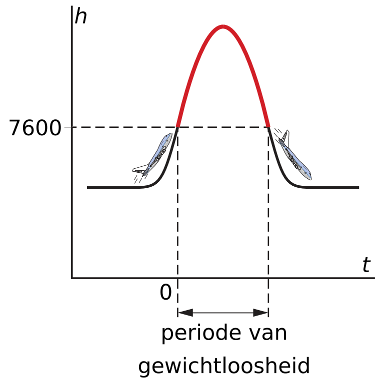
Figuur 8

Bereken a en b. Gebruik getallen met één cijfer achter de komma.

(bron: examen havo wiskunde A in 2010, tweede tijdvak)

Opgave 16: Paraboolvlucht

Op aarde kun je gewichtloosheid ervaren tijdens zogenaamde ‘paraboolvluchten’ met een vliegtuig. Deze vluchten worden onder andere gebruikt om astronauten te trainen. Een dergelijke paraboolvlucht verloopt als volgt. Eerst versnelt de piloot het vliegtuig, waarna het steil omhoog stuurt. Op een hoogte van 7600 meter schakelt de piloot de motoren zo ver terug dat alleen nog maar de luchtweerstand wordt overwonnen. Op dat moment begint de werkelijke paraboolvlucht en de toestand van gewichtloosheid. Zie de figuur.



Figuur 9

Het vliegtuig gaat, vanwege de hoge snelheid, eerst nog omhoog. Als de top van de paraboolbaan is bereikt, duikt het vliegtuig omlaag totdat het weer op dezelfde hoogte is als aan het begin van de paraboolvlucht. Op dat moment schakelt de piloot de motoren weer op vol vermogen en is de toestand van gewichtloosheid voorbij. De hoogte van het vliegtuig tijdens de paraboolvlucht wordt gegeven door de formule:

$h = -9{,}81 \cdot t^2 + 0{,}38 \cdot v \cdot t + 7600$.

Hierin is h de hoogte in meter, t de tijd in seconden en v de snelheid van het vliegtuig in km/h bij de start van de paraboolvlucht, dat is bij $t = 0$. Om zinvol te kunnen trainen is het belangrijk dat de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden achtereen duurt.

Onderzoek bij welke snelheden v van het vliegtuig de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden duurt.

(bron: examen havo wiskunde A in 2012, eerste tijdvak)

Testen

Opgave 17

De grafiek van een lineaire functie gaat door de punten $A(-24{,}42)$ en $B(30{,}16)$. Stel een formule van deze lijn op. Indien nodig rond af op twee cijfers achter de komma.

Opgave 18

Een echtpaar wil vanaf het station met de taxi naar huis. Ze kunnen kiezen tussen een vaste ritprijs of een kilometer/tijdtarief. De vaste ritprijs is onafhankelijk van tijd en afstand en je spreekt deze van tevoren af met de taxichauffeur. De taxirit bestaat volgens het kilometer/tijdtarief uit drie delen: een instaptarief van € 2,83, een kilometertarief van € 2,00 en een tijdtarief van € 0,34 (per minuut). Het echtpaar weet dat de afstand van station naar huis 5 km is.

a Bij de taxi is de ritprijs (R) nu bij een afstand van 5 km afhankelijk geworden van de tijd (a) dat het echtpaar in de auto zit. Stel het bijbehorende functievoorschrift $R(a)$ op.

b De taxichauffeur heeft voor 5 km een vaste ritprijs van € 17,50. Bij welke reistijd is het voordeliger om dit aanbod aan te nemen?

c Taxi’s rijden in de stad gemiddeld 30 km/h. Wat raad je dit echtpaar aan als ze 5 km van het station wonen?

Opgave 19

Een bedrijf verkoopt een bepaald product. Bij een prijs van € 7,00 verkoopt het bedrijf 1450 van die producten en bij een prijs van € 10,00 verkopen zij er 1300. Tussen de prijs p en het aantal verkochte producten q bestaat een lineair verband.

a Stel de formule op voor q als functie van p.

b Bij welke prijs is de opbrengst maximaal?