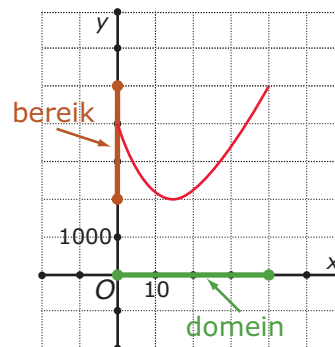


## 2.2 Domein en bereik

### Inleiding

Bij veel functies kun je niet zomaar elk getal invoeren. Denk aan functies die wortels bevatten. In praktische situaties hebben waarden soms geen nut. Een negatieve grootte van een oppervlak bijvoorbeeld, is betekenisloos. Ook als uitkomst is vaak niet alles mogelijk, regelmatig moet een uitkomst binnen bepaalde grenzen vallen. Om die beperkingen aan te geven is een speciale notatie nodig.



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- de intervalnotatie gebruiken om te kunnen aangeven dat waarden beperkt zijn;
- het begrip 'domein' gebruiken voor de mogelijke invoerwaarden;
- het begrip 'bereik' gebruiken voor de mogelijke uitkomsten;
- coördinaten van toppen van grafieken berekenen met de grafische rekenmachine.

### Voorkennis

- het begrip 'functie' en de bijbehorende notaties gebruiken;
- grafieken van functies goed in beeld brengen.

### Verkennen

#### Opgave V1

Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van een windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Als de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken 32 m is, dan kan het vermogen  $P$  in kW (kilowatt) van een bepaalde molen berekend worden met de formule:  $P = 0,52 \cdot v^3$ .

Hierin is  $v$  de windsnelheid in m/s. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.

- Welke waarden denk je dat  $v$  kan aannemen?
- Schat welke vermogens een windmolen zoals deze kan leveren.



Figuur 2

#### Opgave V2

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- Welke waarden kan  $x$  aannemen?
- Maak een grafiek bij deze functie.
- Welke functiewaarden heeft deze functie?

## Uitleg 1

Het vermogen van een windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windsnelheid en van de bouw van de molen. Als de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken 32 m is, dan kan het vermogen  $P$  in kW (kilowatt) van een bepaalde molen berekend worden met de formule:  $P(v) = 0,52 \cdot v^3$ .

Hierin is  $v$  de windsnelheid in m/s. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.

Bij windsnelheden van boven de 30 m/s is dat het geval.

Dit betekent dat bij deze functie alle invoerwaarden liggen in een interval vanaf  $v = 0$  tot en met  $v = 30$  m/s. Deze invoerwaarden vormen het domein ( $D_P$ ) van de functie. Je schrijft:  $D_P = [0, 30]$ .

Bij deze windsnelheden horen vermogens vanaf  $P(0) = 0$  tot en met  $P(30) = 14040$  kW.

Vanwege het beperkte domein van de functie  $P(v)$  zullen ook de uitkomsten beperkt zijn. Het interval waarbinnen alle uitkomsten liggen, heet het bereik ( $B_P$ ) van de functie. Bekijk je de grafiek op de grafische rekenmachine, zie je dat het bereik loopt van  $P = 0$  tot en met  $P = 14040$ . Het bereik van  $P$  schrijf je als  $B_P = [0, 14040]$ .

In **Uitleg 2** lees je meer over de notatie van domein en bereik.

### Opgave 1

In **Uitleg 1** lees je over het vermogen van een bepaalde windmolen afhankelijk van de windsnelheden.

- Plot de grafiek van  $P(v)$  en geef de vensterinstellingen.
- Reken zelf na welke waarden  $B_f$  kan aannemen.

Besloten wordt om de windmolen uit te schakelen bij windsnelheden onder de 4 m/s en boven de 25 m/s.

- Welke waarden kunnen domein en bereik van de functie  $P(v)$  dan aannemen?  
Bekijk nu de functie  $f(x) = 0,52x^3$ .
- Zijn er bij deze functie beperkingen voor de invoerwaarden en voor de functiewaarden? Welke waarden kunnen domein en bereik van de functie  $f(x)$  aannemen?

### Opgave 2

Gegeven is de functie  $f$  door  $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ .

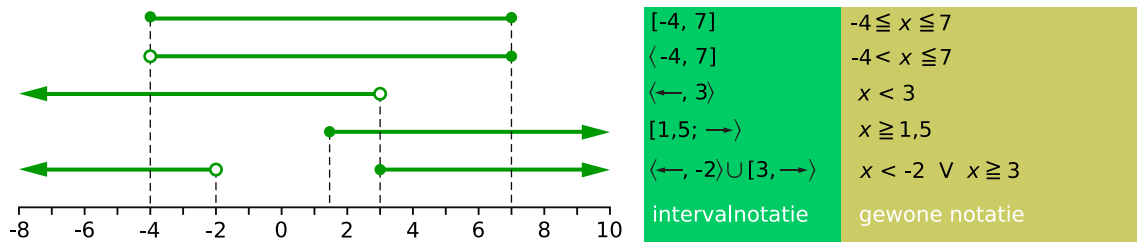
- Uit welke getallen bestaat het domein van deze functie? En waarom?  
Het domein van deze functie wordt wel geschreven als  $D_f = [0, \rightarrow)$ .
- Wat zou de pijl betekenen? En waarom zou het rechterhaakje een andere vorm hebben gekregen als het linkerhaakje?
- Reken enkele functiewaarden uit, maak eventueel een tabel. Welke functiewaarden kunnen voorkomen?
- Schrijf het bereik van deze functie op. Gebruik dezelfde notatie als voor het domein.

## Uitleg 2

Een interval is niets anders dan een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje van een getallenlijn. Bij de notatie ervan schrijf je de grenswaarden (de kleinste en de grootste waarden, de kleinste eerst) van het interval op tussen twee haakjes. Daarbij horen twee afspraken:

- de vorm van de haakjes bepaalt of de grenswaarde nog wel bij het interval hoort of juist niet meer - de haken  $[$  en  $]$  geven aan dat de grenswaarden nog bij het interval horen, de haken  $<$  en  $>$  geven aan dat de grenswaarden niet bij het interval horen;
- voor intervallen die aan één kant geen grenswaarde hebben gebruik je een pijltje.

Je ziet voorbeelden van intervallen met het bijbehorende deel van de getallenlijn.



Figuur 3

Je ziet in de figuur het teken  $\cup$ . Dit teken wordt gebruikt om aan te geven dat je alle getallen van twee (of meer) afzonderlijke intervallen samen bedoelt. Als het domein of het bereik uit alle reële getallen bestaat schrijf je  $D_f = \mathbb{R}$  of  $B_f = \mathbb{R}$ .

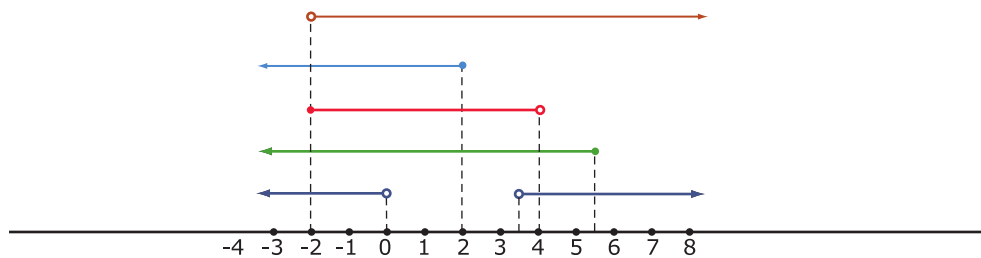
### Opgave 3

Bekijk de intervallen in [Uitleg 2](#). Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen  $\langle -2,4]$ ,  $[2, \rightarrow \rangle$ ,  $[1; 3,5]$ ,  $\langle \leftarrow, 0]$  en  $\langle \leftarrow, 4 \rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$ .

### Opgave 4

Bekijk de getekende intervallen.

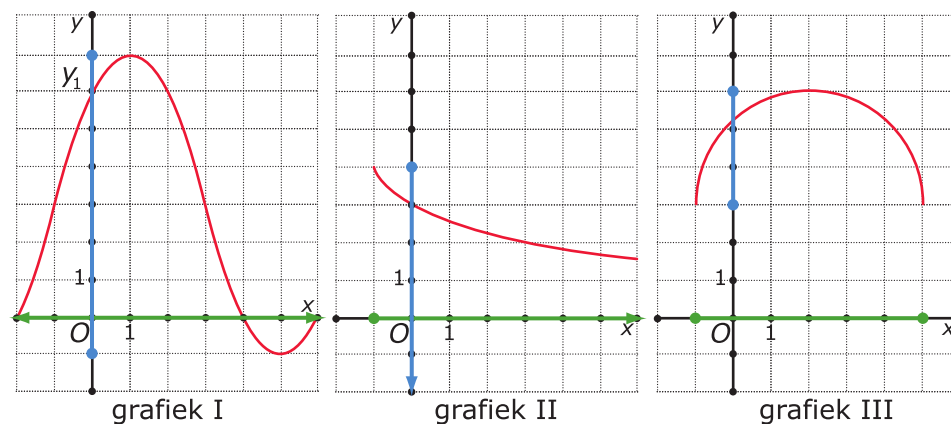


Figuur 4

Schrijf ze in intervalnotatie.

### Opgave 5

Bekijk de grafieken van drie functies. Het domein en het bereik van de functie zijn bij de grafiek aangegeven (met de kleuren blauw en groen). De pijltjes betekenen dat het interval oneindig in die richting door loopt.



Figuur 5

Schrijf het domein en bereik van deze drie functies in intervalnotatie.

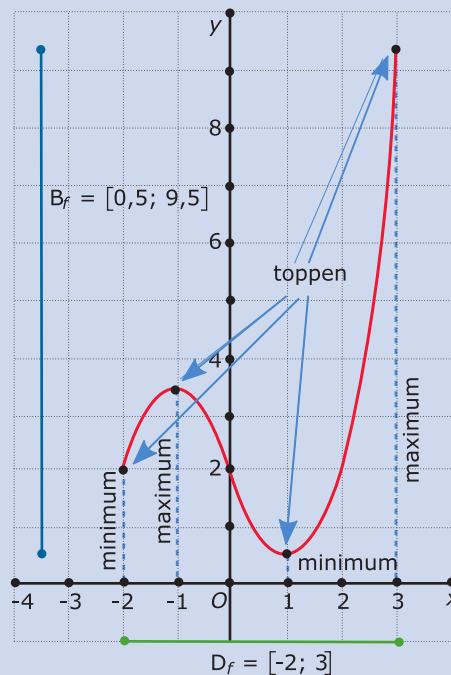
## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Alle toegestane invoerwaarden samen vormen het **domein** van een functie. Het domein heeft te maken met beperkingen van de invoervariabele en die kunnen worden ingegeven door de situatie, maar ook wel door de aard van de functie. Bijvoorbeeld de wortel uit een negatief getal heeft geen reële waarde en delen door 0 kan niet. Het domein van functie  $f$  wordt aangegeven door  $D_f$ .

Alle mogelijke functiewaarden samen vormen het **bereik** van een functie. Om het bereik van een functie  $f$  te kunnen bepalen heb je een goed beeld van de grafiek van  $f$  nodig. Daarbij zijn de toppen van een grafiek vaak van belang. In een top heeft de functie een **maximum** (grootste functiewaarde) of een **minimum** (kleinste functiewaarde). Hoe je die met behulp van de grafische rekenmachine kunt vinden, lees je in het **Practicum**. Het bereik van functie  $f$  wordt aangegeven door  $B_f$ .

Voor domein en bereik van een functie wordt meestal de intervalnotatie gebruikt. Een **interval** is een aaneengesloten verzameling reële getallen, een stukje getallenlijn dus. Alle reële getallen noteer je als  $\mathbb{R}$ .



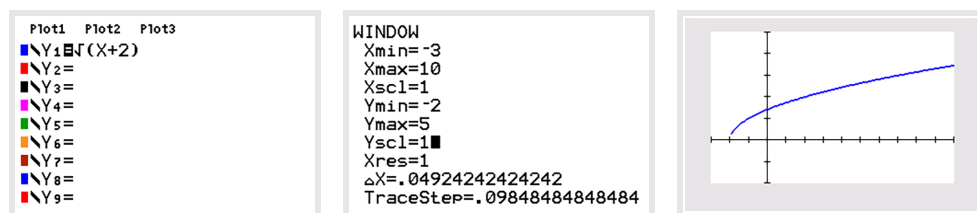
Figuur 6

### Voorbeeld 1

Met de grafische rekenmachine kun je (een deel van) de grafiek van  $f(x) = \sqrt{x+2}$  goed in beeld brengen. Geef het domein en het bereik van  $f$ .

Antwoord

Je weet dat de functiewaarden groter worden naarmate je een groter getal voor  $x$  kiest. Je kunt niet de wortel nemen van een negatief getal. Dus er moet gelden dat  $x+2 \geq 0$  en hieruit volgt dat  $x \geq -2$ . Het kleinste getal dat mogelijk is als invoerwaarde is  $x = -2$ . Je krijgt dan als functiewaarde:  $f(-2) = \sqrt{-2+2} = 0$ .



Figuur 7

Hier bepaalt het functievoorschrift wat het domein en het bereik zijn:

- de wortel uit een negatief getal is niet reëel, dus:  $D_f = [-2, \rightarrow)$ ;
- de functiewaarden zijn 0 of groter, dus:  $B_f = [0, \rightarrow)$ .

De gebruikte vensterinstellingen zijn  $-3 \leq x \leq 10$  en  $-2 \leq y \leq 5$ .

### Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 1**. Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = 4 - \sqrt{x}$ .

- Welke waarden kan  $x$  aannemen? Schrijf het domein van  $f$  op.
- Bereken algebraïsch de snijpunten van de grafiek van  $f$  met de assen.
- Bekijk de grafiek van  $f$ . Schrijf het bereik van  $f$  op.

### Opgave 7

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = \sqrt{2x + 4}$ .

Geef het domein en het bereik van  $f$ .

### Voorbeeld 2

Een keeper schopt de bal in de lucht. Voor de hoogte van de bal  $h$  in meter na  $t$  seconden geldt  $h(t) = -3,5t^2 + 14,7t + 0,8$ .

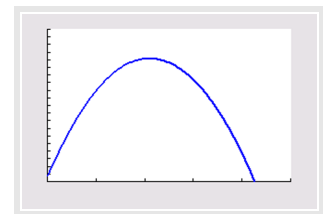
Benader het domein en bereik van  $h$  in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

De grafiek van  $h$  is een bergparabool en het domein en bereik daarvan wordt bepaald door de situatie.

Je weet dat  $t \geq 0$ . Verder snijdt de grafiek de horizontale as bij  $t \approx 4,25$ . Dus het domein (afgerond op twee decimalen) is  $[0; 4,25]$ .

Voor het bereik moet je de top van de grafiek bepalen. Met de grafische rekenmachine vind je dat er een maximum is van 16,235. Omdat de bal op de grond komt is de minimale waarde 0. Dus het bereik is  $[0; 16,235]$ .



Figuur 8

### Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.

- Maak zelf de grafiek van de gegeven functie en laat je grafische rekenmachine de twee nulpunten berekenen.
- Bepaal ook het maximum van deze functie met behulp van de grafische rekenmachine.
- Bereken hoeveel seconden de bal meer dan 10 meter boven de grond is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Schrijf nu ook het domein en het bereik op van de functie  $f(x) = -3,5x^2 + 14,7x + 0,8$  zonder beperkingen voor  $x$ .

### Opgave 9

Bekijk de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt gestoten. De kogel komt 14 meter ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 meter boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule  $h(x) = -0,0625(x - 6)^2 + 4$  waarin  $h$  de hoogte van de kogel boven de grond is en  $x$  de afstand is die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.



Figuur 9

- Laat zien dat de kogel inderdaad 14 meter ver komt.
- Welke invoerwaarden zijn hier zinlijk? Schrijf het domein van  $h(t)$  op.
- Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 meter boven de grond zit.
- Welke functiewaarden zijn hier zinlijk? Schrijf het bereik van deze functie op.

## Verwerken

### Opgave 10

Bepaal van de functies het domein en het bereik. Noteer ze als interval. (Eventuele benaderingen op twee decimalen.)

- a  $f(x) = x^2 - x - 6$
- b  $g(x) = x^2(x - 2)(x - 3)$
- c  $h(x) = -3 + 3\sqrt{2 + 6x}$
- d  $i(x) = 2 - \sqrt{9 - 2x}$

### Opgave 11

Gegeven is de functie  $f$  met  $f(x) = -2(x - 10)^2 + 60$  en domein  $[0, 40]$ .  
Bepaal het bereik van  $f$ .

### Opgave 12

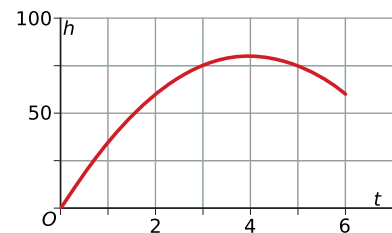
Gegeven is de functie  $f(x) = x^2 - 2x^4$ .

- a De standaardinstellingen zijn niet erg gelukkig als je de toppen van de grafiek van  $f$  wilt zien. Kies andere instellingen en bepaal de coördinaten van de toppen van de grafiek van  $f$ .
- b Geef  $D_f$  en  $B_f$ .

### Opgave 13

Een vuurpijl wordt vanaf de grond afgeschoten. De hoogte boven de grond hangt daarna tot hij uit elkaar spat af van de tijd. Er geldt:  $h(t) = 40t - 5t^2$ . Hierin is  $h$  de hoogte boven de grond in meter en  $t$  de tijd in seconden.

- a De vuurpijl spat na 6 seconden uit elkaar. Hoe hoog komt hij maximaal?
- b Schrijf het domein en het bereik van deze functie op, rekening houdend met de beschreven situatie.
- c Op welke hoogte spat de vuurpijl uit elkaar?
- d Hoeveel seconden is de vuurpijl hoger dan 40 meter?
- e Waarom is de getekende grafiek niet de baan van de vuurpijl?



Figuur 10

### Opgave 14

Een handelaar heeft wekelijks 400 exemplaren van een bepaald product in de verkoop. Hij heeft geen concurrentie, dus de hoeveelheid  $q$  die hij verkoopt, hangt alleen af van de prijs  $p$  die hij per exemplaar vraagt. Er geldt:  $q = 400 - 0,5p$ .

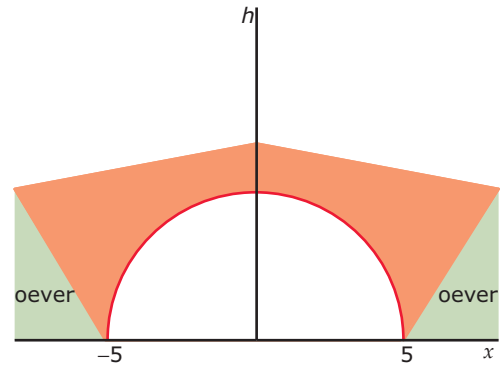
- a Geef een formule voor de opbrengst  $R$  als functie van de prijs  $p$ .
- b Welke waarden kan  $p$  aannemen?
- c Welke waarden kan  $R$  aannemen?

### Opgave 15

De boog onder een brug heeft de vorm van de grafiek van

$$h(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad (\text{met } x \text{ en } h \text{ in meter}).$$

- Welke waarden voor  $x$  kun je hier invullen?
- Wat zijn de maximale en de minimale waarden van  $h$ ?



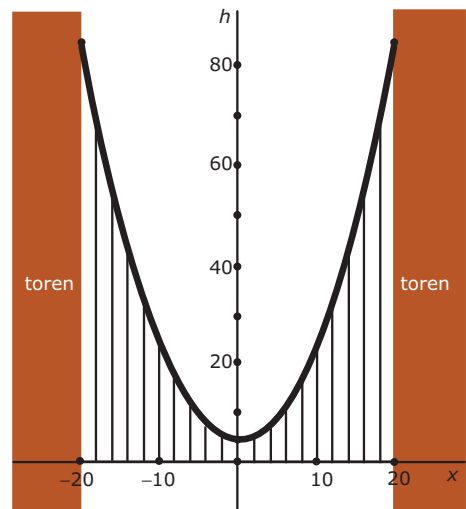
Figuur 11

## Toepassen

### Opgave 16: Hangbrug

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt aan stalen masten of stenen torens. Hier zie je een spankabel hangen tussen twee torens die 40 meter uit elkaar staan. Er geldt:  $h(x) = \frac{9}{50} \cdot x^2 + 5$ . Aan die spankabels hangen tuidraden waar de brug aan is opgehangen.

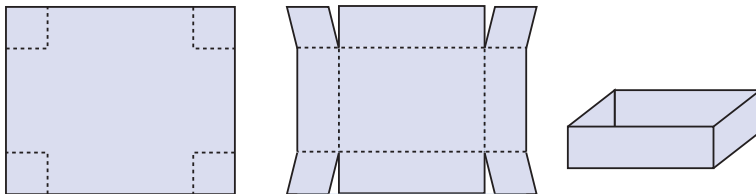
- Welke waarden voor  $x$  zijn in deze situatie zinnig?
- Hoe lang zijn de kortste en de langste tuidraden?
- Er zijn twee tuidraden met een lengte van 45,5 meter. Hoe ver hangen deze twee tuidraden van elkaar?



Figuur 12

### Opgave 17: Bakje van karton

Van een rechthoekig stuk karton van 12 cm bij 20 cm kun je een bakje maken. Daarvoor teken je in iedere hoek een vierkantje. Je knipt van elk vierkantje één zijde helemaal in en plakt het doosje in elkaar zoals je in de figuren kunt zien.



Figuur 13

Als je er op dezelfde wijze een deksel bij maakt, krijg je een doosje waarvan de inhoud  $I$  wordt bepaald door de afmetingen van het vierkantje.

- Noem de lengte en de breedte van het vierkantje  $x$ . Stel een formule op voor  $I(x)$ .
- Bepaal het domein en het bereik van  $I(x)$ . Rond af op twee decimalen.
- Hoe groot moet het vierkantje zijn om een maximale inhoud te krijgen?

## Testen

### Opgave 18

Breng de grafiek van deze functies in beeld met de standaardinstellingen van het venster. Schrijf het domein en het bereik van deze functies op.

- a  $f(x) = 4 - (x - 2)^2$
- b  $g(x) = 2x^3 - 4$
- c  $h(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$

### Opgave 19

Gegeven is de functie  $f(x) = x^4 - 8x^2$ .

- a Bepaal met behulp van de grafische rekenmachine de toppen van de grafiek.
- b Geef het domein en bereik van deze functie.

### Opgave 20

Hangbruggen zijn bruggen die zijn opgehangen aan zware spankabels. Die spankabels hangen op hun beurt bijvoorbeeld aan een stalen boog. Op de foto zie je 'De oversteek', een brug over de Waal in Nijmegen, die in 2014 in gebruik is genomen.



Figuur 14

Voor deze brug geldt (bij benadering):  $h(x) = -0,003x(x - 285)$  met  $h(x)$  de hoogte van een punt van de boog boven het punt van de brug dat daar recht onder zit en  $x$  de afstand van het punt op de brug tot de pilaar, beide in meters. De brug is symmetrisch.

- a Welk domein heeft de functie  $h$  in de beschreven situatie?
- b Welk bereik heeft de functie  $h$  in de beschreven situatie? Rond af op een gehele getallen.
- c Er zijn twee punten op de brug waar de hoogte van de boog 30,5 m is. Hoe ver liggen deze punten van elkaar in meters nauwkeurig?

## Practicum: Grafische rekenmachine

Als je met functies werkt, wil je alle karakteristieken (nulpunten, toppen en asymptoten) in beeld. In het volgende practicum kun je nalezen hoe dat gaat. Bekijk alleen het stukje 'Functiewaarden, nulpunten en toppen'. De rest heb je pas later nodig.

- [Functies en de TI83/TI84](#)
- [Functies en de TIInspire](#)
- [Functies en de Casio fx-CG50](#)
- [Functies en de HPprime](#)
- [Functies en de NumWorks](#)





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@math4all.nl](mailto:a.f.otten@math4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---

