1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Je moet nu voor jezelf een overzicht zien te krijgen over het onderwerp **Werken met formules**. Een eigen samenvatting maken is nuttig.

Begrippenlijst

- formule — variabele — grootheid — eenheid
- herschrijven — uitdrukken in — haakjes wegwerken — ontbinden in factoren
- functie
- vergelijking — vergelijking oplossen — balansmethode — terugrekenen — inklemmen
- ongelijkheid — ongelijkheid oplossen

Activiteitenlijst

- soorten formules herkennen — grafieken maken bij verbanden tussen twee variabelen
- formules herschrijven — de éne variabele uitdrukken in de andere — formules combineren
- formules invoeren in de grafische rekenmachine en grafieken erbij maken
- vergelijkingen oplossen met alle bekende methoden
- ongelijkheden oplossen

Achtergronden


Figuur 1

Het gebruik van formules is een betrekkelijk recente ‘uitvinding’. De Franse amateurwiskundige **François Viète (1540—1603)** was de eerste die een systematische symbolische notatie voor algebraïsche problemen bedacht. Hij gebruikte letters voor onbekenden: klinkers voor variabelen en medeklinkers voor constanten (die hij als eerste coëfficiënten noemde). Zijn bijdrage aan de theorie van het oplossen van vergelijkingen is mede daardoor heel groot, want voor die tijd moesten alle oplossingsmethoden in woorden worden omschreven...

Al eerder had de theoloog **Nicole d'Oresme (1323—1382)** voor zijn natuurkundige onderzoekingen de grafiek uitgevonden. Maar pas nadat **René Descartes (1596—1650)** de beschrijving van rechte en kromme lijnen met behulp van formules bedacht, werd het gebruik van grafieken zoals wij die tegenwoordig kennen langzamerhand gemeengoed. Descartes gebruikte voor variabelen letters achterin het alfabet (vaak x, y en z) en voor constanten letters voor in het alfabet. Dat doen wiskundigen tegenwoordig nog steeds... Daarom weet je dat de formule $y = ax + b$ een (lineair) verband beschrijft tussen x en y, waarin a en b constanten zijn.

Testen

Opgave 1

Los de vergelijkingen algebraïsch op. Rond indien nodig af op twee decimalen nauwkeurig.

a $610 + 0{,}2q = 55 - 0{,}3q$

b $2 - 8(x - 2) = 4 + 3(4 - x)$

c $-0{,}15(x + 25)^2 + 15 = 0$

d $2\sqrt{2x - 4} = 10$

e $k^2 - k = 90$

f $2x^2 + 10x = 12$

Opgave 2

Los de vergelijking $x^2+\sqrt{2x} = 20$ op met behulp van de grafische rekenmachine. Geef een benadering in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

a Gegeven is de formule $\frac{3x-9}{2} = \frac{3y}{4}$. Druk y uit in x.

b Gegeven zijn de formules $K = 3a - 2b + 22$ en $b = -a + 8$. Druk K uit in a.

Opgave 4

Vanaf een toren wordt een vuurpijl afgeschoten. De hoogte h van de vuurpijl hangt af van de tijd t dat deze onderweg is. Er geldt: $h = 100 + 40t - 5t^2$. Hierin is h in meter en t in seconden gemeten.

a Breng de grafiek van h in beeld op de grafische rekenmachine.

b Op welke hoogte boven de begane grond werd de vuurpijl afgeschoten? Na hoeveel seconden was de vuurpijl weer op diezelfde hoogte?

c Na hoeveel seconden was de vuurpijl op het hoogste punt in zijn baan? Hoeveel meter boven de begane grond was hij op dat moment?

d Na hoeveel seconden kwam de vuurpijl op de grond terecht?

e Kun je met deze gegevens de baan van de vuurpijl in beeld brengen? Verklaar je antwoord.

Opgave 5

Een fabrikant wil zijn hagelslag verpakken in doosjes met een vierkante bodem. Voor een doosje gebruikt hij 800 cm^2 karton. Ga ervan uit dat een doosje precies de vorm van een balk heeft.

a De hoogte van zo'n doosje wordt aangegeven met h en de zijden van het grondvlak met x. Laat zien dat het verband tussen h en x beschreven wordt door de formule: $4xh + 2x^2 = 800$.

b De verpakkingsmachine laat een maximale hoogte van 12 centimeter toe. Bepaal de waarde van x bij $h = 12$ cm. Geef de benadering in mm nauwkeurig.

c Herleid de formule $4xh + 2x^2 = 800$ tot h een functie is van x en bereken welke h bij $x = 8$ hoort.

Toepassen

Opgave 6: Koolmonoxide-uitstoot

Koolmonoxide (CO) is één van de stoffen die via de uitlaat van een auto de lucht inkomt. De hoeveelheid CO die uitgestoten wordt is afhankelijk van de temperatuur van de motor en van de rijsnelheid. Voor de CO-uitstoot bij de warme motor geldt: $u = 4{,}4 + \frac{196{,}0}{v}$. Bij een koude motor geldt: $u = 6{,}9 + \frac{298{,}5}{v}$. Hierin is u de uitstoot in gram per kilometer en v de snelheid in kilometer per uur.

a Hoe kun je aan de formules zien dat de uitstoot per kilometer afneemt als de snelheid toeneemt?

b De uitstoot u van een koude motor bedroeg 14 g/km. Hoe hard reed deze auto?

Iemand is geïnteresseerd in het verschil tussen de uitstoot bij een koude en bij een warme motor. Hij onderzoekt hoeveel procent de uitstoot bij een koude motor meer is dan bij een warme motor. Dat percentage hangt af van de snelheid.

c Hoe groot is dat percentage bij een snelheid van 30 kilometer per uur?

Er bestaan ook formules waarbij de CO-uitstoot gegeven wordt afhankelijk van de ritlengte en de rijtijd. Voor een warme benzinemotor geldt: $u_{tot} = 4{,}4L + 0{,}054t$. Hierin is u_{tot} de totale hoeveelheid CO in gram uitgestoten tijdens de rit, L de ritlengte in kilometers, t de rijtijd in seconden en 0,054 is afgerond op drie decimalen.

d Laat zien hoe deze formule kan ontstaan uit de eerste formule voor de CO-uitstoot bij een warme motor.

Opgave 7: Maximaal bakje

Van een vierkant stuk papier van 20 cm bij 20 cm wordt een bakje gemaakt door uit de hoeken een vierkantje weg te knippen. De randen die ontstaan worden naar boven gevouwen. Stel dat zo'n geknipt vierkantje een zijde heeft van x cm.

a Maak een formule voor de inhoud I als functie van x.

b Welke waarden kunnen x en b aannemen?

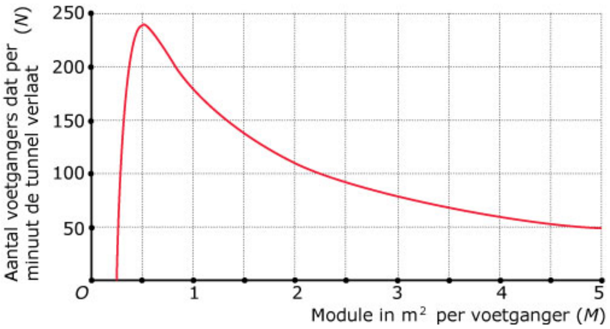
c Plot de grafiek van I. Let op de waarden die x kan aannemen en zorg voor een zodanige grafiek dat alle mogelijke waarden van I in beeld komen.

d Bepaal voor welke waarde van x de inhoud maximaal is.

Examen

Opgave 8: Treinreizigers te U.

Treinreizigers die op het station te U. uitstappen, kunnen de uitgang van het station alleen bereiken via een voetgangerstunnel. De tunnel is 30 meter lang en 3 meter breed. De snelheid van de voetgangersstroom in de tunnel is afhankelijk van de drukte. Een maat voor de drukte is de module, dat is het gemiddelde aantal vierkante meter per voetganger.



Figuur 2

a Op zeker moment bevinden zich 120 mensen in de tunnel, die allen in de richting van de uitgang lopen. Bereken voor deze situatie de module.

Het verband tussen de snelheid van de voetgangersstroom V en de module M wordt gegeven door de formule $V = 87 - \frac{26}{M+0,5}$ met V in meter per minuut en M in m^2 per voetganger.

b Bereken de module bij een snelheid van 50 m per minuut. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

c Wanneer een voetganger ongehinderd kan lopen, is zijn snelheid ongeveer 5 km/h. Onderzoek of dat in overeenstemming is met de formule.

d Er bestaat een verband tussen de waarde van M en het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat (N). Het verband tussen M en N staat grafisch weergegeven in de figuur. Schat zo nauwkeurig mogelijk hoeveel mensen er per minuut de tunnel verlaten in het geval dat de snelheid van de voetgangersstroom 70 m per minuut is.

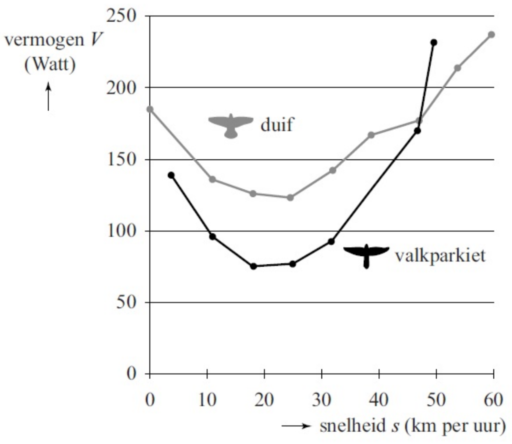
e Een belangrijk gegeven bij het ontwerpen van een tunnel is het maximale aantal mensen dat in korte tijd kan worden verwerkt. Bij welke snelheid is het aantal voetgangers dat per minuut de tunnel verlaat maximaal? Licht je antwoord toe.

(bron: examen wiskunde A havo 1989 - II)

Opgave 9: De valkparkiet

Er wordt veel onderzoek gedaan naar het verband tussen het vermogen (het energieverbruik per seconde) en de vliegsnelheid bij vogels. Het vermogen V wordt gemeten per kg borstspier en uitgedrukt in Watt. Een onderzoek heeft uitgewezen dat de grafiek van het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen U-vormig is. Dat wil zeggen: vliegen met lage of hoge snelheid kost veel vermogen, terwijl vliegen met een snelheid daartussenin minder vermogen kost.

In de figuur is dit verband voor valkparkieten en duiven weergegeven.



Figuur 3

Dit onderzoek toont bij valkparkieten een bij benadering kwadratisch verband aan tussen de vliegsnelheid en het vermogen. Voor valkparkieten geldt de volgende formule:

$V = 0{,}19s^2 - 8{,}71s + 169{,}72$

Hierbij is V het vermogen in Watt en s de snelheid in kilometer per uur.

a Bereken met behulp van de formule bij welke snelheden in km per uur het vermogen V van een valkparkiet 120 Watt is.

b Bepaal bij welke snelheid in kilometer per uur het vermogen V van een valkparkiet minimaal is.

Ook bij duiven kun je een formule opstellen voor het verband tussen s en V. In de figuur kun je aflezen dat duiven bij een snelheid van 8 kilometer per uur en bij een snelheid van 34 kilometer per uur een vermogen van 150 Watt ontwikkelen.

Voor duiven is het verband tussen de vliegsnelheid en het vermogen dan van de vorm:

$V = p \cdot (s - 8)(s - 34) + 150$

Ook hier is V het vermogen in Watt en s de snelheid in kilometer per uur.

Het is bekend dat duiven die stil in de lucht hangen ($s = 0$) een vermogen van 185 Watt ontwikkelen. Met dit gegeven kun je nu de constante p berekenen.

c Bereken p en herschrijf de formule in de vorm $V = as^2 + bc + c$. Rond a, b en c indien nodig af op één decimaal.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2013 - II)