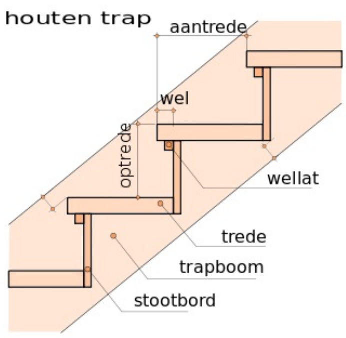
1.4 Vergelijkingen

Inleiding

Een architect wil een goede trap ontwerpen. Hij gebruikt daarvoor de formule: $2 \cdot \textit{optrede} + \textit{aantrede} = \textit{paslengte}$.

Hij gaat uit van een paslengte van 70 cm. Voor de optrede wil hij 16 cm nemen. Vult hij deze gegevens in de formule in, dan krijgt hij de vergelijking: $32 + \textit{aantrede} = 70$. Hij kan dus als aantrede nemen: $\textit{aantrede} = 70 - 32 = 38$ cm. Op deze manier heeft hij de vergelijking opgelost. Het getal 38 maakt de vergelijking kloppend: $32 + 38 = 70$.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- systematisch vergelijkingen met één variabele oplossen met al bekende oplossingsmethoden;
- vergelijkingen oplossen met de grafische rekenmachine.

Voorkennis

- werken met variabelen (met ‘letters’);
- eenvoudige algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Je hebt in voorgaande jaren al vergelijkingen opgelost.

a Zet even je kennis op een rijtje: welke soorten vergelijkingen ken je en welke oplossingsmethoden ken je?

Een zuiver rechthoekig doosje met een vierkante bodem en een hoogte van 12 cm heeft een buitenoppervlakte (inclusief bodem en deksel) van 512 cm^2.

b Welke afmetingen heeft dat doosje? Beantwoord deze vraag met behulp van een vergelijking.

Uitleg

De formule $4(x + 3) = -6 + x$ is een voorbeeld van een vergelijking. Bij deze vergelijking kun je een getal voor x zoeken dat de vergelijking waar maakt: aan beide zijden van het isgelijkteken komt er hetzelfde uit. Dat kun je doen met de balansmethode.

Je kunt bijvoorbeeld zo te werk gaan:

$$\begin{aligned}
4(x+3) &= -6 + x \\
&\quad \text{linkerzijde haakjes wegwerken} \\
4x + 12 &= -6 + x \\
&\quad \text{beide zijden } -12 \\
4x &= -18 + x \\
&\quad \text{beide zijden } -x \\
3x &= -18 \\
&\quad \text{beide zijden } /3 \\
x &= -6
\end{aligned}$$

Je kunt dit antwoord nog controleren door aan beide zijden van de gegeven vergelijking voor x het getal -6 in te vullen.

Opgave 1

Los de vergelijkingen op met de balansmethode.

a $3t - 400 = 700$

b $3t - 400 = 700 - 2t$

c $-4x + 5 = 4x - 11$

Opgave 2

Los de vergelijkingen op met de balansmethode. Rond af op twee decimalen.

a $2300 - 0{,}15 \cdot p = 1600 + 0{,}42 \cdot p$

b $\frac{x-3}{4} = \frac{1}{5}(10 - 2x)$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Formules zoals $2x + 3 = 10$, of $x^2 + 5x + 6 = 0$ zijn **vergelijkingen**. Je kunt waarde(n) zoeken die de vergelijking kloppend maken, dat heet het **oplossen van een vergelijking**.

Vergelijkingen kun je systematisch oplossen door herschrijven. Je gebruikt dan algebraïsche methoden, zoals:

- de **balansmethode**, waarbij je aan beide zijden van het ‘isgelijkteken’
  - hetzelfde optelt of aftrekt;
  - met hetzelfde vermenigvuldigt of door hetzelfde deelt (maar niet 0).
- de **terugrekenmethode**, waarbij je bewerkingen ongedaan maakt door het tegenovergestelde te doen:
  - optellen maak je ongedaan door aftrekken (en omgekeerd);
  - vermenigvuldigen maak je ongedaan door delen (en omgekeerd);
  - machten maak je ongedaan door worteltrekken (en omgekeerd).
- **ontbinden in factoren**, waarbij je gebruik maakt van het feit dat een vergelijking van de vorm $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$. Het teken $\vee$ betekent dat je deze uitdrukking moet lezen als $a = 0$ en/of $b = 0$ (dus $a = 0$ of $b = 0$ of beide).

Je kunt niet altijd een vergelijking via algebraïsche methoden oplossen. Dan kun je nog denken aan **inklemmen**: je zoekt de oplossing door verschillende waarden te proberen op een steeds kleiner zoekgebied. De grafische rekenmachine heeft daar diverse routines voor ingebouwd, zie het **Practicum**.

Als er staat bereken **algebraïsch** of los algebraïsch op, dan moet je de opdracht stap voor stap met behulp van algebra oplossen. Inklemmen is dan bijvoorbeeld niet toegestaan.

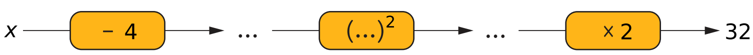
Als er staat bereken **exact** of los exact op, dan moet je de opdracht ook stap voor stap oplossen en mag je niet afronden.

Voorbeeld 1

In de vergelijking $2(x - 4)^2 = 32$ komt de onbekende x maar op één plek voor. Je kunt hem oplossen met terugrekenen.

Antwoord

Je zoekt eerst uit hoe je heen rekent vanuit x:



Figuur 2

Vervolgens ga je terugrekenen:

$$x \longleftarrow \boxed{+\ 4} \longleftarrow \dots \longleftarrow \boxed{\pm\sqrt{\dots}} \longleftarrow \dots \longleftarrow \boxed{/\,2} \longleftarrow 32$$

Figuur 3

Je vindt: $x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} + 4$ en dus $x = 0 \vee x = 8$. Controleer door in te vullen.

Opgave 3

a Los de vergelijking $2 \cdot \sqrt{x+3} = 4$ op door terugrekenen.

b Probeer ook de vergelijking $3 \cdot \sqrt{x+2} + 5 = 2$ op te lossen met terugrekenen.

c Waarom is het bij wortelvergelijkingen extra belangrijk om je antwoord te controleren?

Opgave 4

Los de vergelijkingen op door terugrekenen.

a $3t - 400 = 700$

b $(3t - 20)^2 = 1600$

c $3 \cdot p^3 = 81$

d $3 \cdot \sqrt{2x-4} = 9$

e $\sqrt{x-4} - 2 = -3$

Voorbeeld 2

Los deze twee vergelijkingen op met ontbinden in factoren:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $x^2 = 2x$

Antwoord

De eerste vergelijking kun je met de somproductmethode oplossen. Je zoekt twee getallen waarvan het product +6 is en de som -5. In de tabel zie je dat de getallen -2 en -3 voldoen.

+6		
1	6	
2	3	
-2	-3	← -5
-1	-6	

Figuur 4

De eerste vergelijking gaat zo:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x-2)(x-3) &= 0 \\ x - 2 &= 0 \vee x - 3 = 0 \\ x &= 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

De tweede vergelijking gaat zo:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x \\ x^2 - 2x &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \\ x &= 0 \vee x - 2 = 0 \\ x &= 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Opgave 5

Los de vergelijkingen op door ontbinden in factoren.

a $0{,}5x^2 = 4x$

b $k^2 + 5k - 6 = 0$

c $8p - p^2 = 0$

d $x^2 = 4x$

e $x^2 = x + 12$

f $x(x - 2) = 3x - 6$

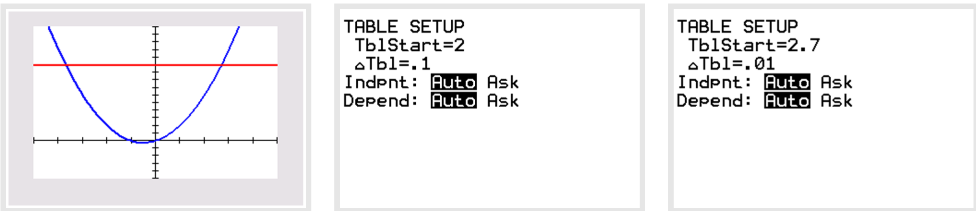
Voorbeeld 3

Niet alle vergelijkingen kun je met de balansmethode, door terugrekenen of ontbinden in factoren systematisch oplossen. De oplossing vinden door inklemmen werkt daarentegen altijd wel. Je moet dan van tevoren een idee hebben van het gebied waarin de oplossing is te vinden.

De vergelijking $x + x^2 = 10$ kun je bijvoorbeeld oplossen met inklemmen. Maar de rekenmachine beschikt ook over een speciale routine om snijpunten van twee grafieken te vinden. Bekijk het **Practicum**. Bepaal de snijpunten van de vergelijking $x + x^2 = 10$.

Antwoord

Eerst maak je de grafieken van $y_1 = x + x^2$ en $y_2 = 10$ op de grafische rekenmachine. Breng ze zo in beeld dat alle snijpunten zichtbaar zijn. De grafieken snijden elkaar tweemaal. De vergelijking heeft twee oplossingen.



Figuur 5

Voor de positieve oplossing moet je zoeken tussen 2 en 3. Stel de tabel in op stappen (voor x) van 0,1. Je ziet dat je verder moet zoeken tussen 2,7 en 2,8. Het zoekgebied wordt kleiner, je klemt de oplossing in.

Stel vervolgens een stapgrootte van 0,01 in en zoek tussen 2,70 en 2,80. Nu zie je dat de oplossing tussen 2,70 en 2,71 ligt, het dichtst bij 2,70. Zo vind je op twee decimalen nauwkeurig: $x \approx 2{,}70$. Als een nauwkeuriger oplossing wordt verlangd, moet je nog doorzoeken tussen 2,700 en 2,710.

Op dezelfde manier bepaal je de andere oplossing.
Op twee decimalen nauwkeurig is de volledige oplossing: $x \approx 2{,}70 \vee x \approx -3{,}70$.
Bekijk in het practicum ook hoe je rekenmachine de snijpunten van twee grafieken kan berekenen.

Opgave 6

Los de vergelijkingen op met de grafische rekenmachine. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^3 + 2x = 16$

b $x + \sqrt{x} = 10$

c $l + \frac{10}{l} = 10$

d $\frac{300}{p+4} = 20$

Verwerken

Opgave 7

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $2x - 34 = -x + 2$

b $5x - 3(x - 5) = 8 + 3x$

c $(2x - 5)^2 = 64$

d $\sqrt{x + 4} = 20$

e $2x^2 = 8x$

f $x^2 - 4x - 32 = 0$

Opgave 8

Los de vergelijking $\sqrt{x} = 8 - x$ op door inklemmen met behulp van de grafische rekenmachine. Zoek alle oplossingen en geef benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

Een bedrijf maakt gebruik van de formules $R = -q^2 + 200q$ en $K = 10q$, hierbij is q het aantal geproduceerde producten, R de opbrengst (in €) en K de kosten (in €).

a De winst W bereken je door de opbrengst te verminderen met de kosten. Geef een formule voor W.

b Het bedrijf heeft € 1000,00 kosten gemaakt. Hoe groot is de winst?

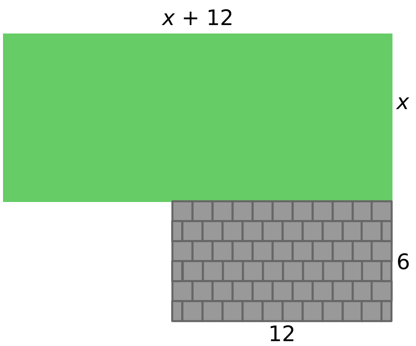
c Bij welke productie maakt het bedrijf geen winst en geen verlies?

d Hoeveel producten kan het bedrijf het beste maken?

Opgave 10

Bekijk het bovenaanzicht van een tuin.

De tuin bestaat uit een rechthoekig terras en een rechthoekig grasveld. Gegeven is dat het terras 12 meter bij 6 meter is en het grasveld $x + 12$ meter bij x meter. De totale oppervlakte van de tuin is 261 m^2. Bereken algebraïsch x.



Figuur 6

Opgave 11

Stel je voor dat iemand van een hoog gebouw een steentje laat vallen. Hij staat 381 m boven de grond. Onder invloed van de zwaartekracht valt een steen eenparig versneld (de luchtweerstand laat je buiten beschouwing). Natuurkundigen hebben daarvoor een rekenmodel bedacht. Daarin hangen de afgelegde weg s (in meter) en de snelheid v (in meter per seconde) af van de tijd t (in seconden) volgens de formules $s = 4{,}9t^2$ en $v = 9{,}8t$.

a Geef een formule voor de hoogte h van het steentje boven de grond als functie van t.

b Bereken op één decimaal na hoeveel seconden het steentje op de grond komt.

c Bereken de snelheid waarmee het steentje op de grond komt. Geef je antwoord zowel in m/s als in km/h.

Toepassen

Opgave 12: Probleem met boswal

Een boer wordt door de gemeente gevraagd om een stuk land te voorzien van een boswal van 4 meter breed. Het stuk land is zuiver vierkant. Het grenst aan één kant al aan het bos, zodat er maar aan drie kanten een strook af hoeft voor de boswal. ‘Ik houd zo maar de helft van mijn land over,’ verzucht de boer. Als dat waar is, hoe groot is dan de oppervlakte van het land dat de boer overhoudt?

Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

Opgave 13: Meewind en tegenwind

Als je in de ochtend van huis naar school fietst en in de middag terugfietst, kan de wind invloed hebben op je totale reistijd. Hoe dat zit, onderzoek je in de rest van deze opgave.

Sylvia woont 10 km van school. Zij gaat altijd op de fiets naar school. We gaan ervan uit dat als er geen wind is, haar snelheid constant 20 km/h is. Haar totale reistijd is op zo'n schooldag dus 1 uur. Meestal waait het echter. We veronderstellen dat Sylvia altijd wind mee heeft op de heenweg en wind tegen op de terugweg en dat de windkracht w de hele dag constant is. Dan is Sylvia's snelheid op de heenweg $20 + w$ km/u en op de terugweg $20 - w$ km/h. Hierbij geldt $0 \leq w \leq 20$. Op een dag geldt $w = 5$. Sylvia's totale reistijd is die dag langer dan 1 uur.

a Bereken hoeveel minuten haar totale reistijd die dag langer is dan 1 uur.

Sylvia's totale reistijd t in uren wordt gegeven door de formule:

$$t = \frac{400}{400-w^2}$$

De formule voor t kan worden gevonden door een formule voor de reistijd voor de heenweg en een formule voor de reistijd voor de terugweg op te stellen en deze formules bij elkaar op te tellen.

b Stel deze formules op en toon daarmee aan dat de bovenstaande formule voor T juist is.

Op een dag is Sylvia's totale reistijd 1 uur en 20 minuten.

c Bereken de waarde van w op die dag.

Met de formule voor Sylvia's totale reistijd kun je zonder te rekenen beredeneren dat haar totale reistijd op een dag met wind groter is dan op een dag zonder wind.

d Geef die redenering.

(bron: examen vwo wiskunde A in 2014 - II)

Testen

Opgave 14

Los de vergelijkingen algebraïsch op.

a $1{,}25t + 5{,}50 = 1{,}85t$

b $0{,}15(p - 2)^2 = 1{,}35$

c $12 - \sqrt{4 + x^2} = 0$

d $3g^2 - 6g = 360$

Opgave 15

Los de vergelijking op met behulp van de grafische rekenmachine (eventuele benaderingen in één decimaal nauwkeurig).

$$0{,}12q + \frac{600}{q} = 30$$

Opgave 16

Voor de totale oppervlakte A van een cilindervormig groenteblik met straal r en hoogte h geldt: $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

a Leg uit hoe je deze formule zelf kunt afleiden.

b Bereken in cm^2 nauwkeurig de oppervlakte van een groenteblik met een diameter van 20 centimeter en een hoogte van 30 centimeter.

c Een groenteblik met een oppervlakte van 1000 cm^2 heeft een hoogte van 20 cm. Bereken de diameter in millimeter nauwkeurig.

d Van een groenteblik met een oppervlakte van 1000 cm^2 zijn de hoogte en de diameter even groot. Bereken de diameter in millimeter nauwkeurig.

Practicum

Bekijk in de volgende practica hoe je **vergelijkingen kunt oplossen met je grafische rekenmachine**.

- **Basistechnieken TI84**
- **Basistechnieken TInspire**
- **Basistechnieken Casio fx-CG50**
- **Basistechnieken HPprime**
- **Basistechnieken NumWorks**

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met de balansmethode, terugrekenen, of ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.