2.4 Meetkundige rijen

Inleiding

Het voorbeeld van het huren van een studentenkamer met twee manieren van huur verhogen is niet voor niks gekozen om met rijen kennis te maken. Bij de éne soort huurverhoging wordt de jaarlijkse huur met een vast percentage verhoogd. Rijen waarbij je de termen kunt bepalen door (vanaf de tweede term) steeds de voorganger met hetzelfde getal te vermenigvuldigen heten meetkundige rijen.
Dergelijke rijen ga je nu nader bestuderen.

Je leert in dit onderwerp

- het begrip meetkundige rij;
- de somformule voor een meetkundige rij.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met de verschilrij en de somrij bij een gegeven rij.

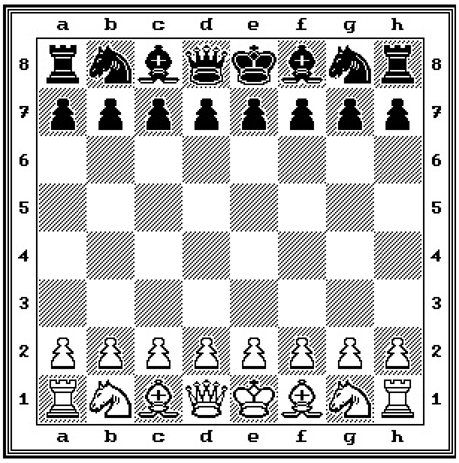
Verkennen

Opgave V1

Er bestaat een mythe over de uitvinding van het schaakspel. Die vertelt dat de uitvinder ervan (Sissah ben Dahir) van zijn koning elke willekeurige beloning mocht vragen. Hij vroeg: 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, enz.

a Hoeveel graankorrels horen er dan bij het 64ste veld?

b Hoeveel graankorrels vroeg hij in totaal? Enig idee hoeveel graan dat is?



Figuur 1

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 2% betaal je
$h_2(n) = 2880 \cdot 1{,}02^n$ euro/jaar.

Bekijk je de grafiek van deze rij op je grafische rekenmachine dan zie je een rij punten die op een kromme stijgende lijn liggen: h_2 is een exponentiële functie. Je noemt een rij waarbij de directe formule een exponentiële functie is een **meetkundige rij**.

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je
$S(4) = h_2(0) + h_2(1) + h_2(2) + h_2(3) + h_2(4) =$
$S(4) = 2880 + 2880 \cdot 1{,}02 + 2880 \cdot 1{,}02^2 + 2880 \cdot 1{,}02^3 + 2880 \cdot 1{,}02^4$

$$\begin{aligned} S(4) &= 2880 + 2880 \cdot 1{,}02 + 2880 \cdot 1{,}02^2 + 2880 \cdot 1{,}02^3 + 2880 \cdot 1{,}02^4 \\ 1{,}02 \cdot S(4) &= 2880 \cdot 1{,}02 + 2880 \cdot 1{,}02^2 + 2880 \cdot 1{,}02^3 + 2880 \cdot 1{,}02^4 + 2880 \cdot 1{,}02^5 \\ S(4) - 1{,}02 \cdot S(4) &= 2880 - 2880 \cdot 1{,}02^5 \end{aligned}$$

Dus je krijgt: $(1-1{,}02)\cdot S(4) = 2880\cdot\left(1-1{,}02^5\right)$.

En dus is $\sum\limits_{n=0}^{4} 2880\cdot 1{,}02^n = \frac{2880(1-1{,}02^5)}{1-1{,}02} \approx 14987{,}64$.

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van een meetkundige rij.

a Hoe kun je aan de directe formule van een rij zien dat hij meetkundig is?

b Hoe ziet de recursieformule van een meetkundige rij er altijd uit?

Opgave 2

Bij meetkundige rijen kun je de som van een aantal termen op een handige manier vinden zonder de grafische rekenmachine te hoeven gebruiken.

a Bereken $100+200+400+800+\ldots+12800$ op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

b Bereken nu $1+2+4+8+\ldots+2^{10}$ op deze manier.

Opgave 3

Een meetkundige rij ziet er altijd zo uit: a, $a\cdot r$, $a\cdot r^2$, $a\cdot r^3$, $a\cdot r^4$, ...

a Hoe ziet de directe formule van deze rij $u(n)$ er uit?

b Hoe ziet de recursieformule van deze rij er uit?

c Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij.

d Bereken de som van de eerste n termen van deze rij.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **meetkundige rij** is een rij waarvan de directe formule een exponentiële functie is. Dit betekent dat elke term ontstaat door zijn voorganger met een vast getal r te vermenigvuldigen. De rij ziet er dus uit als a, $a\cdot r$, $a\cdot r^2$, $a\cdot r^3$, ...
Meestal wordt in plaats van groeifactor het woord **reden** gebruikt voor de vaste vermenigvuldigingsfactor.

- directe formule: $u(n) = a\cdot r^n$ met $n = 0,1,2,3,4,\ldots$
- recursieformule: $u(n) = u(n-1)\cdot r$ met $u(0) = a$ en $n = 0,1,2,3,4,\ldots$

De **verschilrij van een meetkundige rij** is: $V(n) = a\cdot r^n - a\cdot r^{n-1} = a(r-1)\cdot r^{n-1}$.

Voor de **somrij van een meetkundige rij** kun je gebruik maken van de techniek die bij de **Uitleg** is gebruikt. Dan blijkt dat de som van de eerste n termen is:

$$S(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} a\cdot r^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Voorbeeld 1

Je ziet hier het begin van drie rijen:

- rij u: 10, 15, 20, 25, ...
- rij v: 10, 20, 40, 80, ...
- rij w: 10, 40, 90, 160, ...

Welke van deze rijen is (waarschijnlijk) een meetkundige rij? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

Om na te gaan of een rij meetkundig is, deel je steeds een term door zijn voorganger. Komt daar steeds hetzelfde getal r (de reden, de groeifactor) uit, dat heb je met een meetkundige rij te maken. Hier is dat de rij v.

De directe formule voor rij v vind je door vast te stellen, dat:

- $v(0) = 10$;
- de reden is $r = 2$.

De gevraagde directe formule wordt: $v(n) = 10 \cdot 2^n$ met $n = 0,1,2,3,4,...$

Opgave 4

Welke van de volgende rijen zijn meetkundig? Geef van elke meetkundige rij de directe formule en het complete recursievoorschrift. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

a 5, 14, 23, 32,...

b 320, 160, 80, 40,...

c 10, 2, -6, -14,...

d 1, 4, 9, 16,...

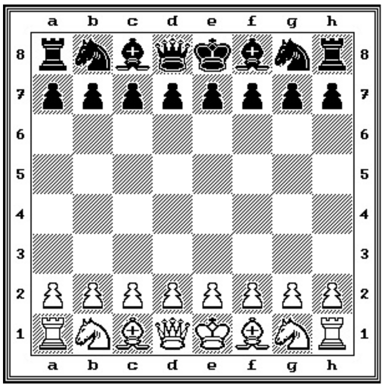
e 1, 3, 9, 27,...

f 2, 6, 18, 54,...

g $5, 5\sqrt{3}, 15, 15\sqrt{3}, 45,...$

Voorbeeld 2

De uitvinder van het schaakbord vroeg als beloning: 1 graankorrel voor het eerste veld van het schaakbord, 2 voor het tweede veld, 4 voor het derde veld, 8 voor het vierde veld, enz.
Hoeveel graankorrels zijn dat samen?



Figuur 2

Antwoord

Je ziet dat er van een meetkundige rij sprake is: $a_n = 2^n$ met $n = 0,1,2,3,4,...$ (Het eerste veld krijgt nummer 0.)

Het totaal aantal graankorrels is nu:

$$S(63) = \sum_{k=0}^{63} 1 \cdot 2^k = \frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de somformule voor een meetkundige rij wordt gebruikt. Gegeven is de rij $a_n = 2^n$ met $n \geq 0$.

a Bereken de som van de eerste 20 termen van deze rij met je grafische rekenmachine.

b Bereken de som van de eerste 20 termen van deze rij met de somformule voor een meetkundige rij.

c Bereken $\sum_{n=5}^{19} a_n$. Gebruik weer de somformule.

Voorbeeld 3

Jan is op 31-12-2000 geboren. In de jaren 2000 t/m 2016 zetten zijn ouders aan het eind van elk jaar € 500,00 op zijn spaarrekening. Ze zijn steeds uitgegaan van 4% rente per jaar en laten dit geld staan tot zijn zeventiende verjaardag. (Er worden ook geen extra stortingen gedaan.)
Hoeveel geld staat er op Jan's zeventiende verjaardag op deze spaarrekening?

Antwoord

Er worden tot Jan's zeventiende verjaardag 17 bedragen gestort (de laatste keer wordt er niets gestort, die 500 euro krijgt Jan voor zijn verjaardag).

- Op 31-12-2000 de eerste 500 euro, die 17 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1{,}04^{17}$.
- Op 31-12-2001 de tweede 500 euro, die 16 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1{,}04^{16}$.
- Op 31-12-2002 de derde 500 euro, die 15 jaar rente oplevert: $500 \cdot 1{,}04^{15}$.

enzovoorts...
In totaal is dit $500 \cdot 1{,}04^{17} + 500 \cdot 1{,}04^{16} + 500 \cdot 1{,}04^{15} + ... + 500 \cdot 1{,}04$ euro.
Dit is de som van een meetkundige rij zonder nulde term. Dus staat er op Jan's spaarrekening op 31-12-2017:

$$\sum_{k=0}^{17} \left(500 \cdot 1{,}04^k\right) - 500 = \frac{500(1-1{,}04^{18})}{1-1{,}04} - 500 \approx 12322{,}71 \text{ euro.}$$

(In werkelijkheid kan het bedrag iets anders zijn i.v.m. het jaarlijks afronden op centen.)

Opgave 6

In **Voorbeeld 3** gaat het over sparen met een vast jaarlijks spaarbedrag en een vaste jaarlijkse rente. Stel je voor dat je vanaf je 16e verjaardag ($t = 0$) elke maand 50 euro op een nieuwe spaarrekening zet. Je krijgt een rente van 0,5% per maand.

a Hoeveel heb je twee maanden na je verjaardag op deze spaarrekening staan? En drie maanden na je verjaardag?

b Waarom is er telkens sprake van de som van een meetkundige rij?

c Stel voor die meetkundige rij een directe formule $B(t)$ op. Neem t in maanden vanaf je verjaardag.

d Bereken met behulp van de somformule voor een meetkundige rij hoeveel je totale saldo S na 24 maanden sparen bedraagt.

Opgave 7

Iemand huurt vanaf 1 januari 2010 een apartement voor € 550 per maand. Zij houdt rekening met een huurverhoging van 5% per jaar.

a Hoeveel moet zij jaarlijks aan huur betalen over het jaar 2011? En over 2012?

b Stel een formule op voor de jaarlijks huurbedragen h_n, met $n = 0$ in 2010.

c Hoeveel betaalt ze in totaal aan huur gerekend over de eerste 10 jaar?

Verwerken

Opgave 8

De rij $t_0, t_1, t_2, ...$ is gegeven door $t_n = 3 \cdot 2^{n+1}$.

a Laat zien dat dit een meetkundige rij is.

b Schrijf de som van de eerste zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

c Schrijf de som van de daarop volgende zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

Opgave 9

Hieronder staan telkens de twee eerste termen van een meetkundige rij $r(n)$ met $n \geq 0$. Schrijf bij elk geval de eerste zeven termen op en geef een directe formule voor de rij.

a 3, 6

b 1, -2

c 100, 10

d 5, 5

Bij elk van deze rijen kun je naar de som van een aantal termen kijken.

e Bepaal bij elk van deze rijen de som van de eerste 12 termen.

f Bepaal bij elk van deze rijen ook $\sum_{n=5}^{9} r(n)$.

Opgave 10

Van een meetkundige rij is de derde term 10 en de zevende term 40. Bepaal een recursieformule en een directe formule voor de rij. Geef duidelijk je nummering aan!

Opgave 11

Twee huurders huren elk een huis tegen een jaarhuur van € 3000 in het eerste jaar. De jaarhuur van huurder A wordt elk jaar met € 140 verhoogt, die van huurder B met 4%.

a Stel formules op voor hun jaarhuur in de opeenvolgende jaren.

b In welk jaar gaat B meer huur betalen dan A? (Gebruik de grafische rekenmachine).

c Hoeveel is A over de eerste tien jaar aan huur kwijt?

d Hoeveel is B over de eerste tien jaar aan huur kwijt?

Opgave 12

Je leent bij een kredietbank een bepaald bedrag tegen een rente van 1,3% per maand.

Laat zien dat dit overeen komt met een jaarrente van ongeveer 16,8%.

Toepassen

Opgave 13: Hypotheekvormen

Iemand wil € 240.000 lenen van een bank, om een huis te kopen of een zaak te beginnen. De bank wil 5% rente per jaar hebben en de lening moet in 30 jaar worden terugbetaald. Hoe ga je zo'n schuld aflossen? Twee bekende methoden zijn:

Lineair afbetalingssysteem

Een lineair afbetalingssysteem, waarbij je elk jaar $\frac{1}{30}$ste deel van de schuld terugbetaalt en jaarlijks rente betaalt over de nog uitstaande restschuld.
Stel je leent op 1-1-2010 ($t = 0$ in jaren) en je betaalt voor het eerst op 31-12-2010.

- Je betaalt dus op $t = 1$: $8000 + 0{,}05 \cdot 240000$ euro.
- Je betaalt op $t = 2$: $8000 + 0{,}05 \cdot 232000$ euro.

Enzovoorts...
In jaar t betaal je: $B(t) = 8000 + 0{,}05 \cdot (240000 - 8000(t-1))$ euro. $B(t)$ is een rekenkundige rij, dus je berekent je totale kosten voor deze lening met de somformule voor zo'n rij.

Annuïteiten afbetalingssysteem

Een afbetalingssysteem met annuïteiten, waarbij je elk jaar evenveel betaalt, rente en aflossing samen (in het begin veel rente en weinig aflossing, later andersom). Natuurlijk betaal je ook nu rente over je restschuld.

Noem de annuïteit A, je leent op 1-1-2010 en betaalt op 31-12 van elk jaar.

- Je restschuld op $t = 1$ is: $240000 \cdot 1,05 - A$ euro.
- Je restschuld op $t = 2$ is: $240000 \cdot 1,05^2 - A \cdot 1,05 - A$ euro.

Na t jaar is je restschuld: $S(t) = 240000 \cdot 1,05^t - A \cdot 1,05^{t-1} - A \cdot 1,05^{t-2} - ... - A$. Je hebt alles afbetaald als dit samen 0 is. Hieruit bereken je de annuïteit en je totale kosten.

a Bij een lineair afbetalingssysteem betaal je elk jaar evenveel aflossing en rente over de restschuld. Maak hierbij een tabel van jaarlijks te betalen bedragen en bereken het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

b Bij een afbetalingssysteem gebaseerd op annuïteiten betaal je elk jaar een vast bedrag. Bereken de grootte van dit bedrag en het totaalbedrag dat je hiervoor kwijt bent als de situatie zich verder niet wijzigt.

Testen

Opgave 14

Bereken $1024 + 512 + 256 + ... + 4 + 2 + 1$.

Opgave 15

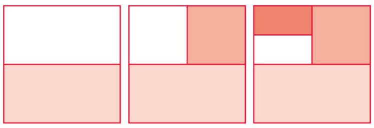
Bereken:

a $\sum_{i=0}^{10} 100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i$

b $\sum_{k=5}^{10} 4 \cdot (-2)$

Opgave 16

Een wit vierkant van 1 m^2 wordt in stappen rood gekleurd. In stap 1 wordt de helft gekleurd, in elke volgende stap de helft van het dan nog witte deel.



Figuur 3

a Hoe groot is de oppervlakte van het nog witte deel na drie stappen?

b Stel een formule op voor de oppervlakte van het rode deel na n stappen.

c Na hoeveel stappen is het witte deel kleiner dan 1 cm^2?

Bekijk de drie rijen gevormd door

- de lengte van de opeenvolgende witte stukken;
- de oppervlakten van die stukken;
- de oppervlakten van de opeenvolgende rode stukken.

d Ga voor elk van die rijen na of hij rekenkundig of meetkundig is.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.