2.3 Rekenkundige rijen

Inleiding

Het voorbeeld van het huren van een studentenkamer met twee manieren van huur verhogen is niet voor niks gekozen om met rijen kennis te maken. Bij de éne soort huurverhoging wordt de jaarlijkse huur met een vast bedrag verhoogd. Rijen waarbij je de termen kunt bepalen door (vanaf de eerste term) steeds hetzelfde getal op te tellen bij de voorgaande term heten rekenkundige rijen.
Dergelijke rijen ga je nu nader bestuderen.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip rekenkundige rij;
- de somformule voor een rekenkundige rij.

Voorkennis

- rijen in beeld brengen met bijvoorbeeld de grafische rekenmachine;
- werken met directe formules en recursieformules;
- werken met de verschilrij en de somrij bij een gegeven rij.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier de beroemde wiskundige **Carl Friedrich Gauss**. Over hem gaat het verhaal dat hij als 11-jarig jongetje door zijn leraar de (in de ogen van de leraar) vervelende opdracht kreeg om de getallen 1 t/m 100 op te tellen.
Waarop de kleine Carl na enig nadenken zei: ‘Het antwoord is 5050’.

a Hoe vond hij dit zo snel uit zijn hoofd?

b En wat heeft dit met de titel van dit onderdeel te maken?

Figuur 2

Uitleg

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je
$h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.

Bij deze manier van huur verhogen betaal je elk jaar 60 euro meer.
Bekijk je de grafiek van deze rij op je grafische rekenmachine dan zie je een rij punten die op een rechte lijn liggen: h_1 is een lineaire functie. Je noemt een rij waarbij de directe formule een lineaire functie is een **rekenkundige rij**.

Wil je weten hoeveel je over de eerste vijf jaar gerekend aan huur moet betalen, dan moet je $S(4) = h_1(0) + h_1(1) + h_1(2) + h_1(3) + h_1(4) = 2880 + 2940 + 3000 + 3060 + 3120$ uitrekenen. Dat kun je uit het hoofd doen.
Je zet dan de optelling twee keer onder elkaar en telt ze op:

$2880 + 2940 + 3000 + 3060 + 3120$

$3120 + 3060 + 3000 + 2940 + 2880 \quad +$

$6000 + 6000 + 6000 + 6000 + 6000$

Dus je krijgt: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6000 = 15.000$ in totaal.

Deze handigheid kun je bij elke rekenkundige rij toepassen. De som van de eerste n termen is dan:

$S(n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

Opgave 1

In de **Uitleg** is sprake van een rekenkundige rij.

a Hoe kun je aan de directe formule van een rij zien dat hij rekenkundig is?

b Hoe ziet de recursieformule van een rekenkundige rij er altijd uit?

Opgave 2

Bij rekenkundige rijen kun je de som van een aantal termen op een handige manier vinden zonder de grafische rekenmachine te hoeven gebruiken.

a Bereken $100 + 150 + 200 + 250 + \ldots + 900$ op dezelfde manier als in de **Uitleg**.

b Bereken nu $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$ op deze manier.

Opgave 3

Een rekenkundige rij ziet er altijd zo uit: a, $a + v$, $a + 2 \cdot v$, $a + 3 \cdot v$, $a + 4 \cdot v$, ...

a Hoe ziet de directe formule van deze rij $u(n)$ er uit?

b Hoe ziet de recursieformule van deze rij er uit?

c Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij.

d Bereken de som van de eerste n termen van deze rij.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **rekenkundige rij** is een rij waarvan de directe formule een lineaire functie is. Dit betekent dat elke term ontstaat door bij zijn voorganger een vast getal v op te tellen. De rij ziet er dus uit als a, $a + v$, $a + 2v$, $a + 3v$, ...

- directe formule: $u(n) = a + n \cdot v$ met $n = 0,1,2,3,4,\ldots$
- recursieformule: $u(n) = u(n-1) + v$ met $u(0) = a$ en $n = 0,1,2,3,4,\ldots$

De **verschilrij van een rekenkundige rij** is nogal saai: alle verschillen zijn gelijk aan v.

Voor de **somrij van een rekenkundige rij** kun je gebruik maken van de methode die bij de **Uitleg** is gebruikt. Dan blijkt dat de som van de eerste n termen is:

$S(n-1) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$

ofwel:

$$S(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} u(k) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (u(0) + u(n-1)).$$

Voorbeeld 1

Je ziet hier het begin van drie rijen:

- rij u: 10, 15, 20, 25, ...
- rij v: 10, 20, 40, 80, ...
- rij w: 10, 40, 90, 160, ...

Welke van deze rijen is (waarschijnlijk) een rekenkundige rij? Stel een daarbij passende directe formule op.

Antwoord

Om te onderzoeken of een rij rekenkundig is bekijk je de verschillen tussen opvolgende termen. Als die steeds hetzelfde getal v opleveren, heb je te maken met een rekenkundige rij. Dit is alleen het geval bij rij u.

De directe formule voor rij u vind je door vast te stellen, dat:

- $u(0) = 10$;
- het verschil tussen twee opvolgende termen is steeds 5.

De gevraagde directe formule wordt: $u(n) = 10 + 5n$ met $n = 0,1,2,3,4,...$

Opgave 4

Welke van de volgende rijen zijn rekenkundig? Geef van elke rekenkundige rij de directe formule en het complete recursievoorschrift. Bekijk eventueel eerst **Voorbeeld 1**.

a $5,14,23,32,41,...$

b $320,160,80,40,...$

c $10,2,-6,-14,...$

d $1,4,9,16,...$

e $1,3,9,27,...$

f $2,6,18,54...$

g $5,5\sqrt{3},15,15\sqrt{3},45...$

Voorbeeld 2

Stel je huurt een kamer voor 240 euro per maand, dus € 2880,00 per jaar. Bij een jaarlijkse huurverhoging van 60 euro betaal je na n jaar
$h_1(n) = 2880 + n \cdot 60$ euro/jaar.
Hoeveel betaal je in totaal gerekend over de eerste 10 jaar?

Antwoord

Je moet $S(9)$ berekenen:

$S(9) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (u(0) + u(9)) = 5 \cdot (2880 + 3420) = 31500.$

Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe de somformule voor een rekenkundige rij wordt gebruikt. Gegeven is de rij $h_n = 2400 + 50n$ met $n \geq 0$.

a Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij met je grafische rekenmachine.

b Bereken de som van de eerste 10 termen van deze rij met de somformule voor een rekenkundige rij.

c Bereken $\sum_{n=5}^{9} h_n$. Gebruik weer de somformule.

Opgave 6

Janna is net 16 geworden en wil graag een scooter kopen. Ze leent daartoe op 1 juli 2011 € 2500 van de bank. Ze zal dit terug betalen in 25 maandelijkse termijnen van 100 euro. Maar de bank vraagt rente: elke maand 1% over het bedrag dat op dat moment nog niet is afgelost.

a Hoeveel moet Janna op 1 augustus aan de bank betalen?

b En hoe groot is dat bedrag op 1 september? En op 1 oktober?

c Waarom heet dit wel een lineaire aflossingsvorm?

d De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule $B(t)$ op. Neem $t = 0$ op 1 juli 2011 en geef aan welke waarden t aanneemt.

e Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel Janna in totaal aan de bank betaalt voor haar scooter.

Voorbeeld 3

Een rekenkundige rij is gegeven door $u(n) = a + n \cdot v$ met $n = 0,1,2,3,4,...$
Stel een formule op voor de som van de 11de tot en met de 26ste term.

Antwoord

Gebruik nu dat de som van n opeenvolgende termen is:

$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (\text{eerste term} + \text{laatste term})$.

Hier is de eerste term $u(10) = a + 10v$.
En de laatste term is $u(25) = a + 25v$.
Er zijn 16 termen op te tellen, dus:

$$\sum_{k=10}^{25} u(k) = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot (2a + 35v) = 16a + 280v.$$

Opgave 7

Je ziet in **Voorbeeld 3** hoe je een formule kunt opstellen voor de som van een deel van een rekenkundige rij $u(n) = a + n \cdot v$ met $n \geq 0$.

a Stel een formule op voor $S(20)$.

b Stel een formule op voor $\sum_{n=10}^{20} u(n)$.

Verwerken

Opgave 8

De rij $t_0, t_1, t_2, ...$ is gegeven door $t_n = 5n + 2$.

a Laat zien dat dit een rekenkundige rij is.

b Schrijf de som van de eerste zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

c Schrijf de som van de daarop volgende zeven termen met het Σ-symbool en bereken die som.

Opgave 9

Hieronder staan telkens de twee eerste termen van een rekenkundige rij $r(n)$ met $n \geq 0$. Schrijf bij elk geval de eerste zeven termen op en geef een directe formule voor de rij.

a 5, 7

b 5, 2

c $1, \frac{9}{10}$

d 5, 5

Bij elk van deze rijen kun je naar de som van een aantal termen kijken.

e Bepaal bij elk van deze rijen de som van de eerste 12 termen.

f Bepaal bij elk van deze rijen ook $\sum_{n=5}^{10} r(n)$.

Opgave 10

Bereken:

a $\sum_{n=0}^{20} (50+2{,}5n)$

b $\sum_{n=10}^{20} (50+2{,}5n)$

Opgave 11

Van een rekenkundige rij is de derde term 10 en de zevende term 22. Bepaal een recursieformule en een directe formule voor de rij. Geef duidelijk je nummering aan!

Toepassen

Opgave 12: Lineaire hypotheek

Iemand koopt een huis voor € 240.000. Dit geld leent hij bij een bank, dat heet een hypotheek. Hij komt met de bank overeen dat hij deze hypotheek in 30 jaar volledig aflost in even grote bedragen per jaar. Daar bovenop moet hij de bank jaarlijks rente betalen over zijn schuld van dat jaar, het rentepercentage wordt voor 30 jaar vastgezet op 4%. Om het eenvoudig te houden is $t=0$ het moment waarop hij het geld leent en begint zijn aflossing een jaar later op $t=1$.

a Hoeveel moet deze persoon op $t=1$ aan de bank betalen aan aflossing en rente?

b En hoe groot is dat bedrag op $t=2$? En op $t=3$?

c Waarom heet dit wel een lineaire hypotheek? En waarom komt hij niet veel voor?

d De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule op. Geef aan welke waarden t aanneemt.

e Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel hij in totaal aan de bank betaalt voor dit huis.

Testen

Opgave 13

Bereken $1024+1022+1020+\ldots+4+2$.

Opgave 14

Bereken:

a $\sum_{i=0}^{20} \left(8+\frac{1}{3}i\right)$

b $\sum_{k=1}^{100} (5+2k)$

Opgave 15

Samir koopt een nieuwe PC. Hij leent daartoe op 1 januari 2010 € 800 van de bank. Hij moet dit terug betalen in 16 maandelijkse termijnen. Maar de bank vraagt rente: elke maand 1% over het bedrag dat op dat moment nog niet is afgelost.

a Hoeveel moet hij op 1 maart 2010 aan de bank betalen?

b De rij met te betalen bedragen is een rekenkundige rij. Stel voor die rij een directe formule $B(t)$ op. Neem $t = 0$ op 1 januari 2010 en geef aan welke waarden t aanneemt.

c Bereken met behulp van de somformule voor een rekenkundige rij hoeveel Samir in totaal aan de bank betaalt voor zijn PC.