1.1 Mogelijkheden

Inleiding

Misschien heb je je wel eens afgevraagd hoeveel verschillende postcodes, hoeveel nummerborden, hoeveel pincodes er zijn. Of hoeveel mogelijkheden er zijn om een dubbel-zes te gooien met twee dobbelstenen in verhouding tot het totaal aantal mogelijkheden. Maar dan moet je wel een idee hebben welke mogelijkheden er zijn. Om daar een goed overzicht over te krijgen kun je het best systematisch te werk gaan. Boomdiagrammen en tabellen helpen er bij.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het aantal mogelijkheden van een telprobleem systematisch weergeven;
- het aantal mogelijkheden van een telprobleem systematisch tellen/berekenen.

Voorkennis

- werken met tabellen en diagrammen;
- werken met kansen.

Verkennen

Opgave V1

Je werpt vier munten op tafel. Je ziet twee keer kop en twee keer munt.

Figuur 2

a Leg uit waarom je op verschillende manieren twee keer kop en twee keer munt kunt gooien.

b Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal als je met vier munten gooit?

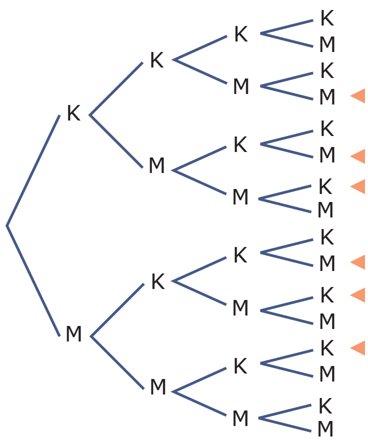
c Bij hoeveel daarvan heb je twee keer kop en twee keer munt?

Uitleg

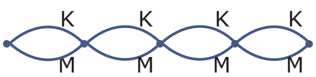
Bij tossen wordt met een munt geworpen. Het werpen met een munt heeft de uitkomst kop of munt. Bij een zuivere munt zijn beide uitkomsten even waarschijnlijk en hebben ze een kans van $\frac{1}{2}$.

Je gooit met vier munten en onderzoekt de mogelijkheden om twee keer kop en twee keer munt te gooien. Je houdt het aantal gunstige en het totaal aantal mogelijkheden overzichtelijk bij. Dat kun je doen met een boomdiagram. Van de in totaal zestien (even waarschijnlijke) mogelijkheden zijn er zes met twee keer kop en twee keer munt.

Je kunt een boomdiagram soms compacter maken door de takken in één punt te laten samenkomen. Je krijgt dan een wegendiagram. Daarin zie je snel dat er in totaal $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogelijkheden zijn. Alleen zijn de afzonderlijke mogelijkheden nu moeilijker te tellen.



Figuur 3



Figuur 4

Je kunt ook proberen om alle mogelijkheden systematisch op te schrijven, maar daarbij is de kans groter dat je een paar mogelijkheden vergeet: KKKK, MKKK, KMKK, KKMK, KKKM, ..., MMMM.

Opgave 1

Bestudeer de **Uitleg**.

a Wat is het verschil tussen een boomdiagram en een wegendiagram?

b Wat is het voordeel van een boomdiagram?

Opgave 2

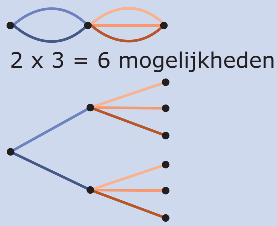
Je hebt in een hoge hoed vier kaartjes met daarop de letters A, B, C, D. Je haalt de kaartjes er willekeurig één voor één uit.
Hoeveel mogelijke volgordes zijn er?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor het systematisch tellen van mogelijkheden bestaan hulpmiddelen.

- Het **wegendiagram**. Kijk in de figuur. Het is een schema (een graaf) waarin je de mogelijkheden weergeeft als verbindingslijnen tussen punten. Het kan ontstaan als compacte versie van een boomdiagram. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door de mogelijkheden om van punt naar punt te komen te vermenigvuldigen.
- Het **boomdiagram**. Kijk in de figuur. Het is een schema waarin je alle mogelijkheden weergeeft als vertakkingen vanuit punten. Dit boomdiagram heeft twee lagen met in de eerste laag twee takken en in de tweede laag drie takken. Het totaal aantal mogelijkheden krijg je door het aantal takken in de laatste laag te tellen. Een boomdiagram kun je altijd maken, maar het kan erg groot zijn.



Figuur 5

- Systematisch **uitschrijven**. Er zijn zes manieren om bij het gooien met vier geldstukken twee keer kop en twee keer munt te gooien: KKMM, KMKM, KMMK, MKKM, MKMK, MMKK. Uitschrijven kan altijd, maar het kan veel tijd kosten en je vergeet snel mogelijkheden.
- Een **rooster**. Kijk in de figuur. Dit rooster laat het aantal even waarschijnlijke mogelijkheden bij het werpen met twee munten zien. Het totaal aantal mogelijkheden is het aantal vakjes met een uitkomst. Een rooster kun je maken als je maar twee verschillende series mogelijke uitkomsten hebt.

	K	M
K	KK	KM
M	MK	MM

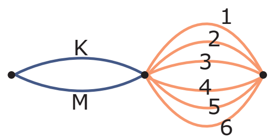
Figuur 6

Voorbeeld 1

Iemand gooit tegelijkertijd met een munt en met een dobbelsteen.
Hoeveel mogelijke uitkomsten zijn er totaal? En bij hoeveel daarvan heb je hoogstens vijf ogen én kop?

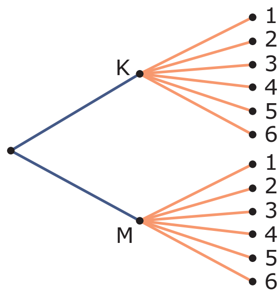
Antwoord

De mogelijke uitkomsten kun je in een wegendiagram weergeven. Er zijn $2 \cdot 6 = 12$ verschillende uitkomsten mogelijk, want je kunt op twaalf verschillende manieren van het beginpunt naar het eindpunt gaan.



Figuur 7

Je ziet de uitkomsten van het gelijktijdig gooien van een munt en een dobbelsteen in een boomdiagram weergegeven. Alle twaalf mogelijkheden zijn afzonderlijk zichtbaar. Er zijn vijf mogelijkheden met hoogstens (niet meer dan) vijf ogen én kop.



Figuur 8

Opgave 3

Iemand heeft dobbelstenen in de vorm van een regelmatig viervlak. Op de grensvlakken staan de cijfers 1, 2, 3 en 4. Elk vlak heeft een gelijke kans om onder te komen als je met zo'n dobbelsteen gooit. Er wordt geworpen met drie van die dobbelstenen, een rode, een groene en een witte. Er wordt gelet op de vlakken die 'onder' komen na het werpen.

a Geef in een wegendiagram alle mogelijke uitkomsten weer. Hoeveel mogelijkheden zijn er in totaal?

b Je wilt het aantal uitkomsten tellen waarbij precies één keer het cijfer 3 onder ligt bij de rode dobbelsteen. Waarom zijn er negen mogelijkheden?

c Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij bij alleen de rode óf alleen de groene dobbelsteen de 3 onder ligt?

d Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij precies één keer de 3 onder ligt?

Voorbeeld 2

Iemand gooit tegelijkertijd met twee dobbelstenen. Als je het totaal aantal ogen raadt, win je het spelletje.
Waarom kun je beter gokken op zeven ogen dan op twee ogen?

Antwoord

Omdat je met twee dobbelstenen werpt, en dus twee series uitkomsten hebt, is een rooster een handige manier om alle mogelijkheden in beeld te brengen.

Je ziet dat er in totaal 36 even waarschijnlijke mogelijkheden zijn. Je ziet ook dat zeven ogen het meest voorkomt. Daar kun je dus het best op gokken.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figuur 9

Opgave 4

Bij het werpen met twee dobbelstenen kun je de mogelijkheden overzichtelijk weergeven in een rooster zoals in het voorbeeld.

a Waarom gaat dat bij het werpen met drie dobbelstenen niet?

b Je werpt met twee dobbelstenen. Op hoeveel manieren kun je negen ogen gooien?

c Je werpt met drie dobbelstenen. Op hoeveel manieren kun je negen ogen gooien?

Opgave 5

Je gooit met twee dobbelstenen.

a Op hoeveel manieren kun je zes ogen gooien?

b Op hoeveel manieren kun je hoogstens vijf ogen gooien?

c Op hoeveel manieren kun je minstens vier ogen gooien?

d Op hoeveel manieren kun je een even aantal ogen gooien?

Opgave 6

Het smaakzintuig (de tong) kan de vier smaken zoet, zout, bitter en zuur onderscheiden. Natuurlijk kun je met je tong ook samenstellingen hiervan onderscheiden. Zo kun je bijvoorbeeld het verschil tussen bitter-zout en bitter-zuur proeven.

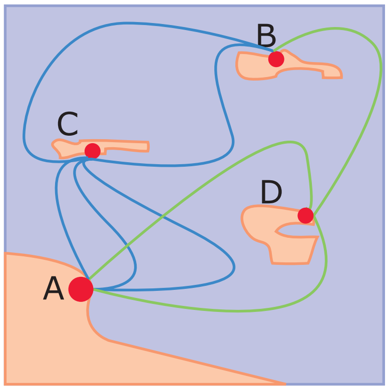
a Hoeveel combinaties zijn er van twee verschillende smaken?

b Hoeveel verschillende samenstellingen zijn er mogelijk van twee of meer smaken?

c In hoeveel van de samenstellingen zit in ieder geval de smaak zoet?

Voorbeeld 3

Je kunt van A naar B via C of via D. Je ziet alle verbindingen getekend.
Op hoeveel manieren kun je van A naar B?



Figuur 10

Antwoord

Je kunt van A naar B gaan via C. Dus $3 \cdot 2 = 6$ manieren. Of je kunt van A naar B via D op $2 \cdot 1 = 2$ manieren. Totaal kun je op $6 + 2 = 8$ manieren van A naar B.
Misschien zie je de handige vuistregel dat je bij “en” mogelijkheden vermenigvuldigt en bij “of” mogelijkheden optelt. Je gaat van A naar C én van C naar B óf van A naar D én van D naar B. Het aantal manieren is $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$.

Opgave 7

Bekijk het figuur in het voorbeeld. Je kunt van C naar D via A of via B, in A en in B moet je overstappen.

a Op hoeveel manieren kun je van C naar D via A?

b Op hoeveel manieren kun je van C naar D via B?

c Op hoeveel manieren kun je van C naar D?

d Hoe heb je gebruikgemaakt van de vuistregels uit het voorbeeld?

Opgave 8

Bij de pincode gaat het om een code van vier cijfers (0, 1, 2, ..., 9). Ga ervan uit dat voor elk cijfer waaruit de pincode bestaat, alle mogelijkheden zijn toegestaan.

a Hoe bereken je met een wegendiagram hoeveel codes van vier cijfers er mogelijk zijn?

b Als het eerste cijfer geen even getal is, hoeveel pincodes zijn er dan mogelijk?

Van je pincode weet je alleen nog dat het cijfer 7 er twee keer direct naast elkaar in staat, maar niet meer op welke plekken. Ook weet je dat je pincode nog twee andere, verschillende, cijfers bevat.

c Hoeveel pincodes zijn er zo mogelijk?

Verwerken

Opgave 9

Een toets bestaat uit zes meerkeuzevragen. Bij elke meerkeuzevraag kun je uit vier antwoorden kiezen. Er is steeds één antwoord goed.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Hoeveel mogelijke verschillende antwoorden zijn er voor de hele toets?

c Je hebt de toets goed voorbereid en je weet vier antwoorden zeker. Hoeveel mogelijke antwoorden voor de hele toets zijn er nog?

d Hoeveel antwoorden voor de hele toets zijn er mogelijk, als je alleen let op ‘goed’ of ‘fout’?

Opgave 10

Om het cijferslot van een koffer open te krijgen, moet je een code van 3 cijfers onthouden.

a Je weet alleen het eerste cijfer nog. Hoeveel mogelijke codes zijn er dan nog?

b Je weet alle drie de cijfers nog, maar de volgorde niet meer. Hoeveel mogelijke codes zijn er maximaal mogelijk?

Opgave 11

Je gooit met drie dobbelstenen.

a Als je alle mogelijkheden in een wegendiagram weergeeft, hoeveel wegen zijn er dan?

b Waarom is een boomdiagram in dit geval niet zo geschikt?

c Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je precies één zes?

d Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je minstens twee zessen?

e Bij hoeveel mogelijke uitkomsten heb je hoogstens twee zessen?

f Hoeveel mogelijkheden zijn er om totaal zes ogen te gooien?

g Hoeveel mogelijkheden zijn er om minstens zestien ogen te gooien?

Opgave 12

Je bestelt een pizza. Je hebt keuze uit een kleine pizza, een gewone pizza en een extra grote pizza. Er zijn twee soorten pizzabodems, de Pizza Crossa en de Pizza Classica. Verder zijn er twaalf verschillende smaken. Je kunt de pizza zelf halen of je kunt hem laten bezorgen.

a Uit hoeveel verschillende pizza's kun je kiezen?

b Hoeveel keuzemogelijkheden heb je als je een pizza wilt eten?

c Je houdt niet van vis. Daarom vallen er vijf smaken af. Uit hoeveel verschillende pizza's kun je nu kiezen?

Opgave 13

Een fruitautomaat heeft drie vensters waarachter banden met plaatjes draaien. Op elke band staan twintig plaatjes. Je brengt ze in beweging door aan een hendel te trekken. Eén druk op de knop en de banden stoppen. Zie je drie dezelfde plaatjes, dan win je een bepaald bedrag. Je ziet het aantal plaatjes per band.
Bekijk de tabel goed en beantwoord de vragen.

plaatje	band 1	band 2	band 3
BAR	1	2	1
bel	8	1	7
pruim	2	7	3
sinaasappel	2	8	4
twee kersen	7	2	0
citroen	0	0	5

Tabel 1

a Hoeveel mogelijkheden zijn er om drie plaatjes op een rij te krijgen?

b Op hoeveel manieren krijg je drie keer bar?

c Op hoeveel manieren krijg je bel of sinaasappel?

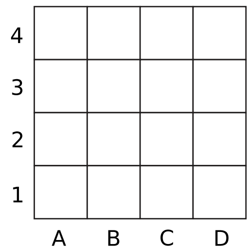
d Op hoeveel manieren krijg je één keer kersen en twee keer pruim?

e Op hoeveel manieren kun je winnen?

Opgave 14

Je hebt een veld van 4×4 vierkante hokjes. Van deze zestien hokjes wil je er precies vier zwart kleuren. Het moet zó gebeuren dat elke rij en elke kolom precies één zwart hokje krijgt. Bovendien mogen er geen twee zwarte hokjes diagonaal (met een hoekpunt) aan elkaar grenzen.

Op hoeveel manieren kun je de vier hokjes kiezen?



Figuur 11

Toepassen

Opgave 15: WK voetbal 2010

Aan het WK voetbal 2010 in Zuid-Afrika deden 32 landen mee. Ze speelden eerst een groepsfase. Hierin speelden de landen in acht poules van vier teams. In zo'n poule speelt elk team één wedstrijd tegen elk ander team. De twee hoogst eindigende teams per poule gingen door naar de knock-outfase. Deze overgebleven teams speelden allemaal één wedstrijd tegen een ander team en de verliezer moest naar huis. De winnaars gingen door en speelden weer één wedstrijd tot er uiteindelijk nog twee teams over waren. Die speelden de finale. Er was ook nog een wedstrijd om de derde plaats, de troostfinale.

In eerdere edities van het WK waren er minder deelnemende teams. Zo waren er in 1974 in West-Duitsland maar zestien teams. Die speelden volgens hetzelfde schema. Eerst in poules van vier teams en de twee hoogst eindigende teams naar de knock-outfase.
Er werden in 1974 natuurlijk veel minder wedstrijden gespeeld dan in 2010.

a Ga met een berekening na of de verdubbeling van het aantal deelnemende teams ook geleid heeft tot een verdubbeling van het totaal aantal wedstrijden.

Alle WK's kenden een groepsfase met poules van vier teams. Er kunnen ook meer teams in een poule zitten. Dat leidt dan tot een groter aantal poulewedstrijden.

$W(n)$ is het aantal wedstrijden in een poule met n teams. Er geldt dat $W(n+1) = W(n) + n$ waarbij $W(n+1)$ het aantal wedstrijden in een poule met $n+1$ teams is.

b Toon aan dat dit klopt.

(naar: pilotexamen 2013 - II)

Testen

Opgave 16

Bij een vakantie naar de zon neem je vooral luchtige kleding mee. Bijvoorbeeld: 2 paar schoenen, 6 paar sokken, 4 korte broeken en 5 shirts.

a Teken een wegendiagram van alle mogelijke combinaties van schoenen, sokken, broeken en shirts.

b Op hoeveel verschillende manieren kun je je zomers kleden?

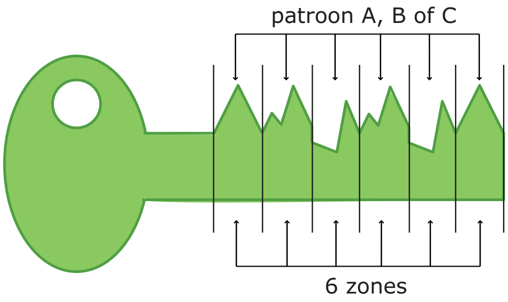
c Op het strand heb je geen sokken en schoenen aan. Op hoeveel verschillende manieren kun je daar luchtig gekleed rondwandelen?

Opgave 17

Voor cilindersloten worden verschillende soorten sleutels gemaakt. De sleutel die je hier ziet, bestaat uit zes gedeelten. Voor elk gedeelte wordt patroon A, B of C gekozen.

a Hoeveel verschillende sleutels van deze soort zijn er mogelijk?

b Hoeveel verschillende sleutels van deze soort zijn er mogelijk waarin één van de patronen niet voorkomt?



Figuur 12

Opgave 18

Een deelnemer aan een tv-quiz krijgt vier kaarten met op elk een naam van een populaire zangeres. Zijn opdracht is om de juiste namen onder de foto’s van deze zangeressen te hangen. De deelnemer kent de vier zangeressen niet en besluit de kaarten op goed geluk onder de foto's te hangen.

a Geef alle mogelijkheden in een boomdiagram weer.

b Hoeveel mogelijkheden heeft hij in totaal?

c Op hoeveel manieren heeft hij één kaart goed?

d Beredeneer waarom er geen mogelijkheden zijn om drie kaarten goed te hebben.

e Op hoeveel manieren heeft hij minstens twee kaarten goed?

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.