3.3 Handig combineren

Inleiding

Voor het repareren van stormschade aan een rieten dak kun je meerdere rietdekkersbedrijven inschakelen elk met eigen voorrijkosten en uurtarieven. Om uit te rekenen welk bedrijf voor jou het voordeligst is informeer je hoeveel uur werk het herstellen van de schade betekent en welke tarieven er worden gehanteerd. En dan sla je aan het rekenen.

Figuur 1 bron: Rijksdienst voor het Cultureel Erfgoed via Wikimedia Commons

Je leert in dit onderwerp

- systematisch een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen oplossen door ze met de balansmethode te combineren.

Voorkennis

- werken met variabelen en algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes;
- een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen grafisch of door het elimineren van een variabele oplossen;
- een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen opstellen aan de hand van gegevens.

Verkennen

Opgave V1

In het vorige onderdeel stond deze opgave:

"Van twee naast elkaar gelegen boerderijen is door een storm het rieten dak beschadigd. Beide boeren laten dezelfde rietdekker komen om het dak te repareren. Boer Brandwijk is voor 2,5 uur werk plus voorrijkosten € 167,50 kwijt en boer Klein Besselink betaalt voor 6 uur werk plus voorrijkosten € 325,00.
Hoeveel bedraagt het uurloon van deze dakdekker?"

a Als u het uurloon en v de voorrijkosten zijn, dan volgt uit de tekst $2{,}5u+v=167{,}50$ en $6u+v=325$. Ga dit zelf na.

b Leg uit hoe je uit deze vergelijkingen meteen kunt afleiden dat $3{,}5u=157{,}50$.

c Hoeveel bedraagt dus het uurloon u?

Uitleg

Je wilt het snijpunt van de lijnen $x+y=20$ en $x-y=36$ berekenen.

Daarvoor moet je het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=36 \end{cases}$$

oplossen. Je kunt dan één vergelijking in de vorm $y=...$ schrijven en de uitdrukking die je dan voor y vindt in de andere vergelijking invullen. Maar hier kun je de oplossing handiger vinden door de balansmethode toe te passen.

Je telt de uitdrukkingen aan de linkerzijde van het isgelijkteken bij elkaar op en hetzelfde doe je aan de rechterzijde van het isgelijkteken. Je krijgt dan $2x = 56$. De variabele y verdwijnt omdat $y + -y = 0$. De variabele y wordt geëlimineerd omdat de termen met y erin even groot zijn.

Uit $2x = 56$ volgt $x = 28$.
Omdat $x + y = 20$ vind je $y = -8$. De oplossing van het stelsel is dus $x = 28$ en $y = -8$.

Het gevraagde snijpunt is $(28, -8)$.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je soms de twee vergelijkingen van een stelsel handig kunt combineren tot een nieuwe vergelijking waarin één van beide variabelen is geëlimineerd.

a Waarom mag je beide vergelijkingen op de beschreven manier optellen?

b Je vindt op deze manier heel snel dat $x = 28$. Hoe vind je de bijbehorende y-waarde?

c Je kon hier beide vergelijkingen ook van elkaar aftrekken. Laat zien hoe dan de oplossing verloopt.

Opgave 2

Bekijk nu het stelsel $2x + 3y = 51 \wedge y - 2x = 21$.

Ook dit stelsel vergelijkingen kun je handig oplossen.

a Zet eerst beide vergelijkingen onder elkaar en wel zo, dat de termen met x onder elkaar komen evenals de termen met y en de termen die alleen uit getallen bestaan.

b Moet je nu beide vergelijkingen optellen of juist aftrekken om een variabele te elimineren?

c Los het stelsel vergelijkingen op.

d Welk snijpunt hebben de twee lijnen $2x + 3y = 51$ en $y - 2x = 21$?

Opgave 3

Bekijk nu het stelsel $4x + 3y = 51 \wedge y - 2x = 21$.

Ook dit stelsel vergelijkingen kun je handig oplossen.

a Zet eerst beide vergelijkingen onder elkaar en wel zo, dat de termen met x onder elkaar komen evenals de termen met y en de termen die alleen uit getallen bestaan.

Optellen of aftrekken van beide vergelijkingen helpt nu niet om een variabele te elimineren. Maar bij elke afzonderlijke vergelijking kun je ook de balansmethode toepassen. Vermenigvuldig bij de onderste vergelijking aan beide zijden van het isgelijkteken met 2.

b Schrijf op welk stelsel vergelijkingen er dan ontstaat.

c Los het stelsel vergelijkingen op door beide vergelijkingen op te tellen.

Je hebt nu het stelsel vergelijkingen opgelost door met behulp van een vermenigvuldiging ervoor te zorgen dat er gelijke termen met x ontstaan. Daarna kon je ze handig combineren, in dit geval optellen.
Maar je had er ook voor kunnen zorgen dat de termen met y gelijk worden.

d Laat zien, hoe je dan het stelsel vergelijkingen kunt oplossen.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wil je een variabele wegwerken, **elimineren**, omdat je het aantal variabelen wilt verminderen. Dat kan het geval zijn als je een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden gaat oplossen. Je werkt dan toe naar één vergelijking met één variabele.

Hieronder zie je bijvoorbeeld een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 4x - 2y = 15 \end{cases}$$

Je kunt dit stelsel oplossen door (bijvoorbeeld) de bovenste vergelijking in de vorm $y = ...$ te schrijven en dit dan in de onderste te substitueren.
Maar je kunt in dit geval ook anders te werk gaan.
Door in de bovenste vergelijking links en rechts van het isgelijkteken met 2 te vermenigvuldigen, maak je de termen met y in beide vergelijkingen gelijk (afgezien van het minteken).

$$\begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ 4x - 2y = 15 \end{cases}$$

Je kunt nu beide **vergelijkingen combineren** door ze op te tellen. Daardoor wordt de variabele y geëlimineerd omdat $2y + \text{-}2y = 0$.
Blijft over $6x = 39$ en dus $x = 6{,}5$.
Als je dit in (bijvoorbeeld) de bovenste van de twee gegeven vergelijkingen invult, vind je $y = 5{,}5$.

Je hebt nu drie manieren van oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden x en y bekeken:

- **grafisch oplossen**: beide vergelijkingen schrijven in de vorm $y = ...$ en dan beide uitdrukkingen gelijk stellen en eventueel grafieken tekenen;
- **oplossen door substitutie**: één van beide vergelijkingen schrijven in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ en dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking invullen;
- **oplossen door combinatie**: beide vergelijkingen combineren zodanig, dat één van de variabelen wordt geëlimineerd;

Al deze drie methoden zijn belangrijk genoeg om te onthouden. Soms is de éne handiger dan de andere, soms lukt een bepaalde methode niet, maar één van de andere wel.

Voorbeeld 1

Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$$

Antwoord

In dit geval is het niet handig om één van de vergelijkingen in de vorm $y = ...$ te schrijven, want dan moet je meteen met breuken rekenen. Hier kun je wel handig beide vergelijkingen combineren als je eerst de bovenste vergelijking (links en rechts van het isgelijkteken) met 3 vermenigvuldigt en de onderste vergelijking met 2 vermenigvuldigt. Je krijgt dan:

$$\begin{cases} 6x - 9y = 24 \\ 6x + 10y = 62 \end{cases}$$

Als je beide vergelijkingen van elkaar aftrekt, vallen de termen met x weg.
Je houdt over: $\text{-}19y = \text{-}38$ en dus $y = 2$.

Deze waarde van y vul je in één van de gegeven vergelijkingen in, bijvoorbeeld in de bovenste. Dat levert op: $2x - 3 \cdot 2 = 8$. Hieruit volgt $x = 7$.

De oplossing van dit stelsel is $x = 7$ en $y = 2$.
Je schrijft de oplossing alleen als coördinatenpaar als het gaat om grafieken in een xy-assenstelsel.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** heb je een stelsel vergelijkingen opgelost door beide vergelijkingen zodanig te combineren dat de termen met x wegvielen.

a Los het stelsel nog eens op door de vergelijkingen zodanig te combineren dat de termen met y wegvallen.

b Los het stelsel op door een vergelijking in de vorm $x = ...$ of $y = ...$ te schrijven en dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking te substitueren.

c Welke aanpak vind je het handigst?

Opgave 5

Los de volgende stelsels vergelijkingen op. Gebruik de manier die je het handigst vindt.

a $\begin{cases} 4y - 3x = 74 \\ 4x + 9y = \text{-}27 \end{cases}$

b $4x - y = 1 \wedge 2x + 5y = 1$

c $x^2 = y - 1 \wedge 2x + y = 16$

Opgave 6

Bekijk het stelsel vergelijkingen $a^2 + b^2 = 17 \wedge a + b = 5$.

a Waarom kun je dit stelsel niet oplossen door beide vergelijkingen (na handig vermenigvuldigen) op te tellen of af te trekken?

b Je kunt dit stelsel vergelijkingen alleen oplossen door de onderste vergelijking in de vorm $a = ...$ of $b = ...$ te schrijven en dan te substitueren. Los het stelsel vergelijkingen op.

Voorbeeld 2

Een stelsel vergelijkingen is niet altijd op te lossen. Als er geen oplossingen zijn spreek je van een strijdig stelsel. Hier zie je twee stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Welke van beide is een strijdig stelsel en wat is er met het andere stelsel aan de hand?

- $y = 3x + 6 \wedge 2y - 6x = 11$
- $y = 3x + 6 \wedge 2y - 6x = 12$

Antwoord

Beide stelsels kun je door substitutie oplossen.

Bij het eerste stelsel vind je dan $2(3x + 6) - 6x = 11$ en dit geeft $12 = 11$. Er is geen variabele meer om te berekenen en wat er overblijft is kennelijk onwaar.
Dit is een strijdig stelsel.

Bij het tweede stelsel vind je dan $2(3x + 6) - 6x = 12$ en dit geeft $12 = 12$. Er is geen variabele meer om te berekenen en wat er overblijft is altijd waar.
Dit is een stelsel met oneindig veel oplossingen.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je twee bijzondere stelsels vergelijkingen. Het éne stelsel heeft geen oplossingen en het andere stelsel heeft er oneindig veel.

a Bekijk het strijdige stelsel nog eens. Schrijf beide vergelijkingen in de vorm $y = ...$ Wat valt op? Wat kun je van de bijbehorende grafieken zeggen?

b Bekijk nu het andere stelsel. Schrijf beide vergelijkingen in de vorm $y = ...$ Wat valt op? Wat kun je van de bijbehorende grafieken zeggen? En waarom zijn er oneindig veel oplossingen?

Opgave 8

Ga van de volgende stelsels vergelijkingen na hoeveel oplossingen ze hebben.

a $\begin{cases} 3p + 2q = 6 \\ 1{,}5p = 5 - q \end{cases}$

b $\begin{cases} 3p + 2q = 6 \\ 1{,}5p = 5 + q \end{cases}$

c $\begin{cases} 3p + 2q = 6 \\ 1{,}5p = 3 - q \end{cases}$

Verwerken

Opgave 9

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ -2x + y = 7 \end{cases}$

b $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a - 2b = 3 \end{cases}$

c $3p + 5q = 326 \wedge 4p - 3q = 19$

d $y - 2x = 6 \wedge 2y - 12 = 4x$

e $\begin{cases} 0{,}1c + b = 99 \\ c - 100b = 0{,}99 \end{cases}$

f $\begin{cases} x + y^2 = 28 \\ 2y = 3x + 1 \end{cases}$

Opgave 10

Een oud raadseltje:
In januari 2006 was Harry viermaal zo oud als Pieter.
In januari 2012 was Harry tweemaal zo oud als Pieter.

Hoe oud waren Harry en Pieter in januari 2006?

Opgave 11

Arash en Ymke zijn jarig en halen ijs voor hun klas: Magnums en Cornetto's.
Arash haalt voor de jongens 6 Cornetto's en 5 Magnums. Ymke haalt voor de meiden 7 Cornetto's en 10 Magnums. Arash is € 22,95 kwijt en Ymke betaalt € 36,15.

Hoeveel kost een Magnum? En een Cornetto?

Opgave 12

Hier zie je een stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden.

$$\begin{cases} x + y + z = 1200 \\ 2x - y = 652 \\ 3x + y = 103 \end{cases}$$

Los dit stelsel op.

Opgave 13

Voor de klemspanning, het spanningsverschil U tussen de twee polen van een batterij, geldt $U = U_{\text{bron}} - R_{\text{i}} \cdot I$ waarin U_{bron} de bronspanning (in volt), R_{i} de inwendige weerstand (in ohm) en I stroomsterkte (in ampère) voorstelt.

Bij een stroomsterkte van 1,5 ampère is de klemspanning 10 volt. Bij een stroomsterkte van 3 ampère is de klemspanning 8 volt.

Bereken de bronspanning en de inwendige weerstand van deze batterij.

Toepassen

In een meubelfabriek worden twee verschillende eikenhouten tafels geproduceerd: een designtafel en een klassieke tafel. Beide tafels worden in de fabriek geschuurd en gelakt. Het schuren gebeurt in een andere afdeling dan het lakken. In de tabel zie je hoeveel uur elke tafel op de verschillende afdelingen wordt bewerkt.

	designtafel	klassieke tafel
schuren	2 uur	3 uur
lakken	2,5 uur	2 uur

Tabel 1

In deze fabriek wordt op elk van de twee genoemde afdelingen 40 uur per week aan deze tafels gewerkt.
Hoeveel van elke soort tafels kan er dan per week worden geproduceerd?

Opgave 14: Tafels

Bekijk hierboven het probleem van de meubelfabriek bij de productie van twee soorten tafels.

a Welke twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je bij dit probleem opstellen?

b Los dit stelsel vergelijkingen op.

c Je wilt geen tafels laten staan die nog niet volledig zijn afgewerkt op een afdeling. Welk antwoord geef je op de vraag?

Opgave 15: Stoelen

Dezelfde meubelfabriek maakt ook bijpassende eiken stoelen. Ook die stoelen worden geschuurd en gelakt. Maar de stoelen worden ook nog bekleed met een bepaalde soort stof. De verwerkingstabel voor de stoelen zie je hiernaast.
Op elk van deze drie afdelingen wordt wekelijks maximaal 40 uur aan deze stoelen gewerkt.

	designstoel	klassieke stoel
schuren	0,5 uur	1,25 uur
lakken	0,75 uur	1 uur
bekleden	1,5 uur	0,75 uur

Tabel 2

a Welke drie vergelijkingen met twee onbekenden kun je bij dit probleem opstellen?

b Hoeveel van deze stoelen kunnen er wekelijks worden geproduceerd? Op welke afdeling houd je dan de meeste werktijd over?

Testen

Opgave 16

Los deze stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden op door beide vergelijkingen te combineren met de balansmethode.

a $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} x + 2y = 12 \\ 5y = 10 - 3x \end{cases}$

Opgave 17

Bereken het snijpunt van de lijnen $x + 2y = 15$ en $y - 3x = 18$.

Practicum: Stelsels oplossen

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **oplossen van stelsels vergelijkingen, het snijpunt van twee lijnen berekenen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.