3.2 Een variabele elimineren

Inleiding

Figuur 1

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee vergelijkingen met twee onbekenden werken. Maar je kunt ook beide vergelijkingen samenvoegen tot één vergelijking met één variabele.

Je leert in dit onderwerp

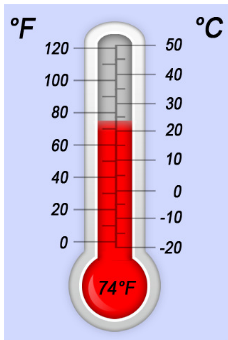
- systematisch een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen oplossen door één van beide variabelen te elimineren.

Voorkennis

- werken met variabelen en algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes;
- een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen grafisch oplossen;
- een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen opstellen aan de hand van gegevens.

Verkennen

Opgave V1



Figuur 2

De omzet van ijs van een ijscoman hangt af van de buitentemperatuur. Stel dat voor het verband tussen de hoeveelheid ijs h (in liter) die hij op een dag verkoopt en de gemiddelde temperatuur gedurende de uren waarin hij ijs verkoopt geldt $h = 2C - 34$, waarin C buitentemperatuur in graden Celsius is.
Je kunt de temperatuur ook meten in graden Fahrenheit. Voor het verband tussen de temperatuur in graden Celsius en die in graden Fahrenheit geldt $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Welke formule geeft het verband weer tussen de verkochte hoeveelheid ijs en de buitentemperatuur in graden Fahrenheit? Schrijf deze formule zo eenvoudig mogelijk.

Uitleg

Figuur 3

Harmonieorkest Apollo houdt een concert. Er zijn kinderkaartjes van € 2,50 per stuk en kaartjes voor personen van 16 jaar en ouder van € 4,50 per stuk. Alle 600 kaartjes zijn verkocht en de penningmeester van Apollo heeft € 2466,= aan inkomsten.

Je wilt weten hoeveel kinderkaartjes er zijn verkocht.

Er zijn verschillende manieren om dit probleem op te lossen. Een manier is het invoeren van variabelen. Noem bijvoorbeeld het aantal kinderkaartjes k en het aantal kaartjes voor volwassenen v. Dan kun je uit de gegevens afleiden

- $k + v = 600$
- $2{,}50k + 4{,}50v = 2466$

Dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je herleiden tot één vergelijking met één onbekende. Schrijf daartoe de eerste vergelijking als $v = 600 - k$. Dit moet ook gelden voor de

variabele v in de andere vergelijking. En dus kun je in die tweede vergelijking de v vervangen door $600 - k$. Je substitueert de uitdrukking $600 - k$ voor v.
Dat levert op $2{,}50k + 4{,}50(600 - k) = 2466$.

Je hebt door deze substitutie één van beide variabelen kunnen 'elimineren' (wegwerken). In dit geval is de v geëlimineerd. De vergelijking die overblijft bevat nog maar één variabele. En die kun je oplossen door de haakjes uit te werken en de balansmethode toe te passen of terug te rekenen. Ga maar na...

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe het probleem van harmonieorkest Apollo wordt opgelost door v te elimineren.

a Laat zien hoe je het probleem verder kunt oplossen.

b Laat zien dat je dit stelsel ook kunt oplossen door k te elimineren. Schrijf stap voor stap op hoe je dan te werk gaat.

Opgave 2

Je wilt het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} 4x - y = -9 \\ 2x = 2y - 7 \end{cases}$ oplossen.

a Schrijf de tweede vergelijking in de vorm $x = ...$ en los het stelsel op door dit in de eerste vergelijking te substitueren.

b Schrijf de eerste vergelijking in de vorm $y = ...$ en los het stelsel op door dit in de tweede vergelijking te substitueren.

Opgave 3

Als je te maken hebt met twee formules met drie variabelen, kun je vaak ook één variabele elimineren. Je zag dat al in **Opgave V1**.

a Leg uit hoe je in die opgave de formule van h afhankelijk van F kunt maken.

Neem de formules $R = p \cdot q$ en $q = 400 - 20p$.

b Schrijf R als functie van alleen p.

c Je kunt een grafiek van R als functie van p maken. Wat voor soort grafiek wordt het?

Je wilt nu R als functie van alleen q schrijven.

d Wat moet je dan eerst doen?

e Schrijf R als functie van alleen q.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Soms wil je een variabele wegwerken, **elimineren** omdat je het aantal variabelen wilt verminderen. Dat kan het geval zijn als je een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden gaat oplossen. Je werkt dan toe naar één vergelijking met één variabele.

Hieronder zie je bijvoorbeeld een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 4x - 2y = 15 \end{cases}$$

Je schrijft de eerste vergelijking als $y = 12 - x$ en vervangt dan in de tweede vergelijking de variabele y door de uitdrukking $12 - x$. Dat heet **substitueren**: je substitueert y door $12 - x$.
Daardoor krijg je $4x - 2(12 - x) = 15$ en dat is één vergelijking met één onbekende. En die kun je direct oplossen.

Je kunt deze werkwijze ook toepassen als je bijvoorbeeld twee formules met drie variabelen hebt. Je krijgt dan één formule met twee variabelen waarbij je vaak wel een grafiek kunt tekenen.

Voorbeeld 1

Los het stelsel vergelijkingen $4x + 2y = 15 \wedge 3x + y = 10$ op.

Antwoord

De tweede vergelijking is eenvoudig in de vorm $y = ...$ te schrijven. Je kunt de uitdrukking die je dan vindt substitueren voor de y in de eerste vergelijking.

$3x + y = 10$ wordt $y = 10 - 3x$.
Na substitutie van $10 - 3x$ voor y wordt de eerste vergelijking $4x + 2(10 - 3x) = 15$.
Nu is uit deze vergelijking de y geëlimineerd.
Deze vergelijking met één variabele kun je oplossen. Je vindt $x = 2{,}5$.

Daarbij hoort $y = 10 - 3 \cdot 2{,}5 = 2{,}5$.
De oplossing van dit stelsel is dus $(2{,}5; 2{,}5)$.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1** heb je een stelsel vergelijkingen opgelost door één variabele te elimineren.

a Los het stelsel nog eens op door de eerste vergelijking in de vorm $y = ...$ te schrijven en dan de gevonden uitdrukking in de tweede vergelijking te substitueren.

b Los het stelsel op door een vergelijking in de vorm $x = ...$ te schrijven en dan de gevonden uitdrukking in de andere vergelijking te substitueren.

c Waarom kun je zeggen dat in het voorbeeld de handigste aanpak is gekozen?

Opgave 5

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 2y = x + 4 \end{cases}$

b $x - 2y = 6 \wedge y - 2x = 4$

c $\begin{cases} 4x - y = 20 \\ x - 3 = 5 \end{cases}$

d $5x - y = 12 \wedge x = y$

Opgave 6

Een appel en drie peren kosten samen € 2,75.
Twee appels en een peer kosten € 1,75.

Hoeveel euro kost één appel?

Voorbeeld 2

Je ziet hier twee formules met drie variabelen. Schrijf a als functie van c.

- Formule I: $a = 2b - 19$
- Formule II: $4b = 6 - 3c$

Antwoord

Formule II is eenvoudig in de vorm $b = ...$ te schrijven. Je kunt de uitdrukking die je dan vindt substitueren voor de variabele b in de eerste vergelijking.

$4b = 6 - 3c$ wordt $b = 1{,}5 - 0{,}75c$.
Na substitutie wordt formule I $a = 2(1{,}5 - 0{,}75c) - 19 = -1{,}5c - 16$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je van twee vergelijkingen met drie variabelen één vergelijking met twee variabelen kunt maken door de variabele die in beide vergelijkingen voorkomt te elimineren.

a Schrijf y als functie van x als $y = 2a + 6 \wedge x + a = 4$.

b Schrijf A als functie van b als $A = l \cdot b \wedge 2l + 2b = 19$.

c Schrijf q als functie van p als $4p - 0{,}5r = 20$ en $2r - 3q = 6$.

Voorbeeld 3

Er bestaan ook stelsels waar machten, wortels, breuken, en dergelijke, in voorkomen.

Los op: $\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x = y^2 - 3 \end{cases}$.

Antwoord

De eerste vergelijking is eenvoudig in de vorm $x = ...$ te schrijven. Je kunt de uitdrukking die je dan vindt substitueren voor de variabele x in de tweede vergelijking.

$x - y + 3 = 0$ wordt $x = y - 3$.
Na substitutie wordt de tweede vergelijking $y - 3 = y^2 - 3$ en dus $y^2 - y = 0$. Dit geeft $y = 0 \vee y = 1$.
Bij $y = 0$ vind je $x =$ -3 en bij $y = 1$ vind je $x =$ -2

De oplossing van dit stelsel is (0,-3) en (1,-2).

Opgave 8

Bekijk hoe in **Voorbeeld 3** een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden wordt opgelost waar ook een kwadraat in voorkomt.

a Loop zelf de oplossing na en voer elke stap zelf uit.

Je kunt dit stelsel ook oplossen zonder eerst één van beide te herleiden tot de vorm $x = ...$ De tweede vergelijking staat immers al in die vorm!

b Los de vergelijking ook op deze manier op.

c Je kunt ook de eerste vergelijking naar de vorm $y = ...$ herleiden. Wat is daarvan het nadeel?

Opgave 9

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} y = x^2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

b $pq^2 = 2 \wedge p(5q - 8) = 1$

c $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6 \\ x + y = 0 \end{cases}$

Verwerken

Opgave 10

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $5x - y = 10 \wedge x = y$

b $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

c $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 5y = 31 \end{cases}$

d $x^2 = 11 - y \wedge 2x - y = 3$

e $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}16y = 1{,}26 \\ 0{,}55x - 0{,}7y = 0{,}61 \end{cases}$

f $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}y = 1 \wedge y - 2x + 3 = 0$

Opgave 11

In de volgende stelsels formules wil je het aantal variabelen verminderen.

a Stel een formule op voor y als functie van x als $y = 3p - 3$ en $p = 2x + 2$.

b Stel een formule op voor z als functie van a als $a = 2x - 2$ en $x = z - 1$.

c Stel een formule op voor a als functie van q als $a = 2p^2 - 1$ en $2p - q = 4$.

d Stel een formule op voor y als functie van x als $x = \sqrt{k - 1}$ en $y = 2k - 3$.

Opgave 12

Van twee naast elkaar gelegen boerderijen is door een storm het rieten dak beschadigd. Beide boeren laten dezelfde rietdekker komen om het dak te repareren. Boer Brandwijk is voor 2,5 uur werk plus voorrijkosten € 167,50 kwijt en boer Klein Besselink betaalt voor 6 uur werk plus voorrijkosten € 325,00.

Hoeveel bedraagt het uurloon van deze dakdekker?

Opgave 13

Gegeven is een kubus met ribben van r cm. De inhoud van deze kubus is V en de oppervlakte is A.

a Stel formules op voor V en voor A.

b Stel een formule op voor V als functie van A en schrijf deze formule zo eenvoudig mogelijk.

c Stel een formule op voor A als functie van V.

d Bereken het volume van een kubus waarvan de totale oppervlakte 100 cm^2 is in cm^3 nauwkeurig.

e Bereken de oppervlakte van een kubus waarvan de inhoud 100 cm^3 is in cm^2 nauwkeurig.

Opgave 14

Loes verkoopt koppen koffie. Het aantal dat zij verkoopt hangt af van de prijs die ze vraagt: $a = 400 - 100p$. Hierin is a het aantal koppen koffie dat ze verkoopt en p is de prijs in euro per kop. De kosten per kop bedragen € 0,50. De winst W die Loes maakt berekent ze met de formule $W = (p - 0{,}50) \cdot a$.

a Licht toe hoe Loes aan de formule voor de winst komt.

b Bij welke prijs per kop en welk aantal koppen koffie maakt Loes de meeste winst?

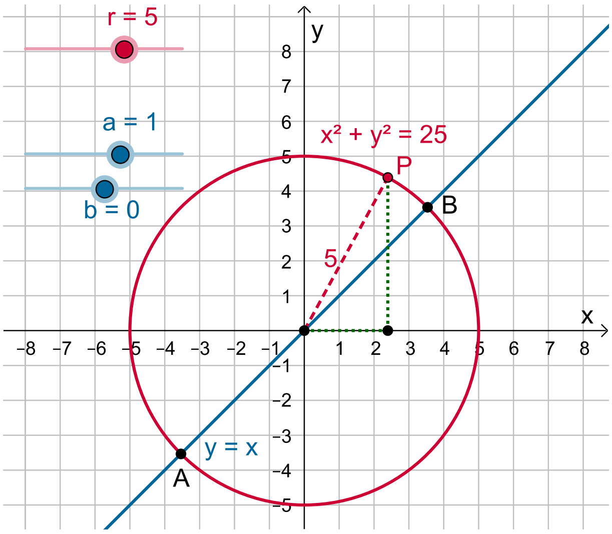
Toepassen

Bekijk de applet: cirkels en lijnen

Dit is een toepassing die typisch is voor wiskunde B in de bovenbouw.

In de figuur zie je een cirkel met middelpunt $O(0,0)$ en straal r.

Als $r = 5$, dan geldt voor elk punt P op de cirkel dat $x^2 + y^2 = 5^2$. Dit noem je wel de **vergelijking van de cirkel**.
Elke cirkel met middelpunt O heeft een dergelijke vergelijking.



Figuur 4

Je ziet ook een rechte lijn met een vergelijking van de vorm $y = ax + b$ waarbij a en b instelbaar zijn.

Als je in een bepaald geval (bijvoorbeeld $r = 5$, $a = 1$ en $b = 0$) de snijpunten van de lijn en de cirkel wilt berekenen, dan kun je dit doen door het bijbehorende stelsel van twee vergelijkingen met onbekenden x en y op te lossen.

Opgave 15: Snijpunten van cirkels en lijnen

Ga uit van $r = 5$, $a = 1$ en $b = 0$.

a Leg uit, waarom voor elk punt op deze cirkel geldt $x^2 + y^2 = 5^2$.

b Je ziet bij deze instellingen een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ en een lijn met vergelijking $y = x$. Bereken de twee snijpunten van de lijn en de cirkel.

Door andere waarden van a en/of b en/of r te kiezen, kun je het berekenen van snijpunten van een lijn en een cirkel oefenen. Meestal komen de coördinaten niet op gehele getallen uit. Om veel vervelend rekenwerk te vermijden kun je dan bijvoorbeeld op één decimaal gaan afronden.

c Oefen jezelf of oefen samen met een medeleerling.

d Neem $r = 5$ en $b = 0$. Voor welke waarden van a krijg je snijpunten met gehele coördinaten?

e Neem $b = 0$. Bij de meeste cirkels krijg je dan alleen als $a = 0$ snijpunten met gehele coördinaten. Voor welke waarden van r krijg je ook voor andere waarden van a snijpunten met gehele coördinaten?

Opgave 16: Snijpunten of raakpunten

Neem in de applet hierboven $r = 5$ en $a = 1$. Er zijn nu waarden van b waarvoor de twee snijpunten van de lijn en de cirkel samenvallen. De lijn raakt dan de cirkel.

a Bepaal eerst zo nauwkeurig mogelijk met de applet welke waarden dit zijn.

Verzin een manier om deze waarden van b te berekenen vanuit de vergelijkingen van de cirkel en de lijn.

b Je ziet bij deze instellingen een cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ en een lijn met vergelijking $y = x$. Bereken de twee snijpunten van de lijn en de cirkel.

Testen

Opgave 17

Los deze stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden op door één van beide variabelen te elimineren.

a $\begin{cases} x + y & = & 8 \\ x - 2y & = & 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} x + 2y & = & 12 \\ xy & = & 10 \end{cases}$

Opgave 18

Voor het omrekenen van graden Kelvin K naar graden Celsius C gebruik je $C = K - 273{,}16$.

Voor het omrekenen van graden Fahrenheit F naar graden Celsius C gebruik je $C = \frac{9}{5}(F - 32)$.

Stel een formule op voor het omrekenen van graden Kelvin naar graden Fahrenheit,

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.