3.1 Grafisch oplossen

Inleiding

Een muziekvoorstelling trekt 300 bezoekers. Een kinderkaartje kostte € 2,50 en een kaartje voor volwassenen kostte € 4,50. In totaal is er voor € 1110,00 aan inkomsten door de kaartverkoop. Wil je nu weten hoeveel volwassenen en hoeveel kinderen er in de zaal zaten, dan kun je met twee variabelen werken. Je krijgt dan twee vergelijkingen met twee onbekenden en die kun je op verschillende manieren oplossen. Over het oplossen van dergelijke stelsels vergelijkingen gaat dit onderdeel.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen opstellen aan de hand van gegevens;
- systematisch een stelsel van vergelijkingen met twee variabelen oplossen.

Voorkennis

- werken met variabelen;
- algebraïsche technieken zoals terugrekenen, de balansmethode bij vergelijkingen en werken met haakjes.

Verkennen

Opgave V1

Harmonieorkest Apollo houdt een concert. Er zijn kinderkaartjes van € 2,50 per stuk en kaartjes voor personen van 16 jaar en ouder van € 4,50 per stuk. Alle 600 kaartjes zijn verkocht en de penningmeester van Apollo heeft € 2466,- aan inkomsten.

Hoeveel kinderkaartjes zijn er verkocht?

Uitleg

Harmonieorkest Apollo houdt een concert. Er zijn kinderkaartjes van € 2,50 per stuk en kaartjes voor personen van 16 jaar en ouder van € 4,50 per stuk. Alle 600 kaartjes zijn verkocht en de penningmeester van Apollo heeft € 2466,- aan inkomsten.

Figuur 2

Je wilt weten hoeveel kinderkaartjes er zijn verkocht.

Er zijn verschillende manieren om dit probleem op te lossen. Een manier is het invoeren van variabelen. Noem bijvoorbeeld het aantal kinderkaartjes k en het aantal kaartjes voor volwassenen v. Dan kun je uit de gegevens afleiden

- $k + v = 600$
- $2{,}50k + 4{,}50v = 2466$

Je hebt dan een ‘stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden’ opgesteld. Beide vergelijkingen zijn lineair en leveren daarom in een assenstelsel met bijvoorbeeld k op de horizontale as en v op de verticale as als grafiek een rechte lijn op. Je noemt dit een kv-assenstelsel.

Omdat de waarden voor k en v beide vergelijkingen waar moeten maken, gaat het om het snijpunt van beide lijnen. Dat kun je met behulp van een tabel vinden of door beide vergelijkingen te herleiden tot de vorm $v = ...$ en dan een vergelijking op te lossen.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** het ‘probleem’ van harmonieorkest Apollo.

a Leg uit hoe je de twee vergelijkingen met twee onbekenden uit de gegevens kunt afleiden.

b Herleid beide vergelijking tot de vorm $v = ...$

c Teken de twee lijnen die bij de gegeven vergelijkingen horen in een kv-assenstelsel. Maak een schatting van het snijpunt.

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide lijnen met behulp van een vergelijking.

e Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag naar het aantal kinderkaartjes?

Opgave 2

De volgende puzzel heb je wellicht eerder gezien:

“Een man en een vrouw zijn samen 91 jaar oud. De vrouw is een aantal jaren jonger dan de man. Toen de man zo oud was als zij nu is, was de vrouw 26. Hoe oud zijn de man en de vrouw nu?”

Je gaat hem nu oplossen met behulp van een stelsel vergelijkingen.

a Neem voor de huidige leeftijd van de vrouw de variabele x en voor de huidige leeftijd van de man y. Welke twee vergelijkingen met twee onbekenden kun je uit de gegevens afleiden?

b Herleid beide vergelijking tot de vorm $y = ...$

c Teken de twee lijnen die bij de gegeven vergelijkingen horen in een xy-assenstelsel. Maak een schatting van het snijpunt.

d Bereken de coördinaten van het snijpunt van beide lijnen met behulp van een vergelijking.

e Wat is nu het antwoord op de gestelde vraag naar hun huidige leeftijden?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

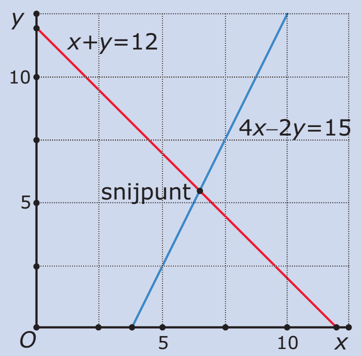
Soms kun je een probleem oplossen door variabelen in te voeren en het probleem te ‘vertalen’ naar een **stelsel vergelijkingen** waarin die variabelen voorkomen.

Hieronder zie je bijvoorbeeld een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 4x - 2y = 15 \end{cases}$$

De accolade wordt gebruikt om aan te geven dat beide vergelijkingen bij elkaar horen. Je zoekt daarom naar een combinatie van waarden voor de twee onbekenden die aan beide vergelijkingen voldoet, die beide vergelijkingen waar maakt. Je kunt het stelsel met behulp van het ‘en’-teken $\wedge$ ook schrijven als

$x + y = 12 \wedge 4x - 2y = 15$



Figuur 3

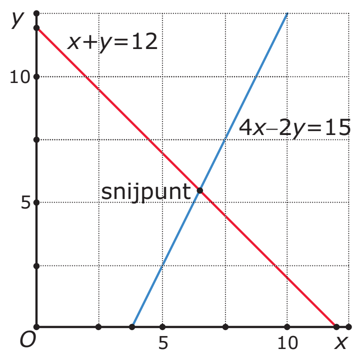
Bij zo'n stelsel vergelijkingen horen grafieken in een **xy-assenstelsel**. Het **snijpunt** van de grafieken is zo'n combinatie van waarden voor de twee onbekenden die aan beide vergelijkingen voldoet. Je noemt dit een **oplossing** van het stelsel vergelijkingen.

Er bestaan stelsels vergelijkingen die geen oplossing hebben. Je spreekt dan van een **strijdig stelsel**.

Voorbeeld 1

Los dit stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden op.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 4x - 2y = 15 \end{cases}$$



Figuur 4

Antwoord

In de figuur zie je de grafieken die bij deze twee lineaire vergelijkingen passen. Je kunt die zelf tekenen met behulp van een tabel met twee berekende punten. Je kunt ook meteen beide vergelijkingen in de vorm $y = \ldots$ schrijven.

Voor een exacte berekening van het snijpunt gebruik je $y = -x + 12$ en $y = 2x - 7{,}5$.
Voor het snijpunt geldt $-x + 12 = 2x - 7{,}5$.
Dit levert op $x = 6{,}5$ en (na invullen in één van de vergelijkingen van het stelsel) ook $y = 5{,}5$.

De oplossing van het stelsel is $(6{,}5; 5{,}5)$.

Opgave 3

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden kunt oplossen.

a Schrijf zelf beide vergelijkingen in de vorm $y = \ldots$ en bereken met behulp daarvan het snijpunt van de bijbehorende lijnen.

b Je hebt de y-waarde van het snijpunt gevonden door invullen. Ga na dat het geen verschil maakt in welke vergelijking van het stelsel je de gevonden x-waarde invult.

Opgave 4

Los de volgende stelsels vergelijkingen op.

a $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 16 \end{cases}$

b $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 2x + 5y = 21 \end{cases}$

Opgave 5

Bekijk in de **Theorie** wat een strijdig stelsel is.

Laat zien dat het stelsel vergelijkingen $3x - 2y = 5 \wedge y = 1{,}5x$ een strijdig stelsel is.

Voorbeeld 2

Van een rechthoek is de omtrek 120 cm en de oppervlakte 589 cm^2.

Bereken de afmetingen van deze rechthoek.

Antwoord

Er zijn weer diverse manieren om dit probleem op te lossen. Het kan onder andere met behulp van twee variabelen: de lengte l en de breedte b.

Dan vind je het stelsel vergelijkingen $l \cdot b = 589 \wedge 2l + 2b = 120$.

De oplossingen van dit stelsel zijn $(19{,}31)$ en $(31{,}19)$.

Opgave 6

Bekijk in **Voorbeeld 2** het probleem van het berekenen van de afmetingen van een rechthoek met gegeven omtrek en oppervlakte.

a Schrijf beide vergelijkingen in de vorm $l = \ldots$.

b Teken grafieken van de bij a gevonden formules in één bl-assenstelsel.

c Laat zien hoe je de b-waarden van de snijpunten kunt uitrekenen met behulp van een vergelijking.

Opgave 7

Van twee getallen is het product 836 en de som 60.

Bereken met behulp van een stelsel vergelijkingen welke getallen dit zijn..

Verwerken

Opgave 8

Los de volgende stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden exact op.

a $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x - 4y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} y = \text{-}0{,}5x + 1{,}5 \\ 2y - x + 10 = 0 \end{cases}$

c $x = 2y + 1 \wedge 0{,}5x - y = 8$

d $\begin{cases} x \cdot y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

Opgave 9

Een tuincentrum heeft dennen en sparren in de aanbieding. Twee buren kopen er voor een (deels gezamenlijke) tuinafscheiding dennen en sparren. De familie De Vries koopt 12 dennen en 15 sparren en de familie Jansen koopt 16 dennen en 11 sparren. De familie De Vries betaalt daarmee € 162,00 en de familie Jansen is € 160,20 kwijt.

Hoeveel kost één den en hoeveel kost één spar in deze aanbieding?

Opgave 10

Van een rechthoekige fabriekshal met een vloeroppervlakte van 120 m^2 is de lengte 7 meter groter dan de breedte.

Bereken de afmetingen van deze hal met behulp van een stelsel vergelijkingen.

Opgave 11

Van driehoek ABC zijn twee hoekpunten gegeven, namelijk $A(1{,}1)$ en $B(7{,}1)$. De lijn AC gaat behalve door punt A ook door $P(3{,}4)$. De lijn BC gaat behalve door punt B ook door $Q(1{,}4)$.

Bereken de exacte oppervlakte van deze driehoek.

Opgave 12

Achilles en de schildpad is een bekende paradox uit de Griekse Oudheid: “De snelle loper Achilles en een schildpad wilden een hardloopwedstrijd houden. De schildpad kreeg een voorsprong van 200 m. De schildpad overtuigde Achilles er echter van dat die hem nooit zou kunnen inhalen. Hij redeneerde: als Achilles de 200 m heeft afgelegd, dan legt de schildpad 1 m af en als Achilles die éne meter heeft afgelegd, dan heeft de schildpad intussen ook weer een stukje afgelegd, enzovoorts. Hier kon Achilles niets tegen in brengen en dus gaf hij de wedstrijd gewonnen.”
Toch kun je eenvoudig narekenen, dat Achilles wel degelijk zou hebben gewonnen. Neem maar eens aan dat hij 10 m/s kan lopen en de schildpad slechts 0,1 m/s. De tijd t is in seconden, beiden starten op $t = 0$.

a Leg uit dat voor de afgelegde afstand a (in m) van Achilles geldt $a = 10t$ en dat voor de afgelegde afstand van de schildpad geldt $a = 200 + 0{,}1t$.

b Bereken met het bij a gevonden stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden de tijd waarbinnen Achilles de schildpad heeft ingehaald.

c Na hoeveel m lopen heeft Achilles de schildpad ingehaald?

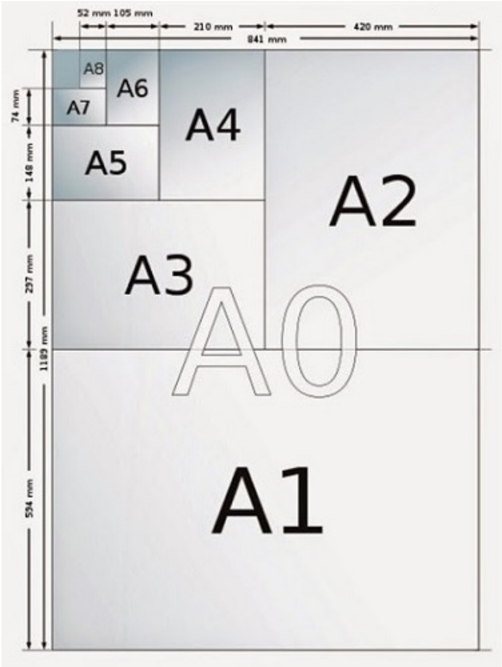
Toepassen

De standaard papierformaten zijn A0, A1, A2, A3, A4, A5, ...

Voor deze papierformaten geldt:

- de breedte van A0 is de lengte van A1, de breedte van A1 is de lengte van A2, enzovoorts;
- de verhouding tussen lengte en breedte is voor elk formaat hetzelfde;
- de oppervlakte van A0 is 1 m^2, die van A1 is 0,5 m^2, die van A2 is 0,25 m^2, enzovoorts;

Hiermee kun je de lengte en de breedte van alle papierformaten uitrekenen...



Figuur 5

Opgave 13: Papierformaten

Bekijk in **Toepassen** hoe de standaard papierformaten zijn samengesteld.

Ga uit van een lengte l en een breedte b van het A0-formaat, beide in m.

a Laat zien dat uit de drie eigenschappen van de papierformaten volgt: $l^2 = 2b^2$.

b Omdat je ook de oppervlakte van het A0-formaat weet, krijg je twee vergelijkingen met twee onbekenden. Welke twee?

c Los dit stelsel vergelijkingen op.

d Welke afmetingen heeft het A0-formaat? En het A4-formaat? Geef de antwoorden in mm nauwkeurig.

Testen

Opgave 14

Los deze stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden op. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

a $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

b $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ xy = 10 \end{cases}$

Opgave 15

Voor een toneelvoorstelling zijn 240 kaarten verkocht. Er zijn twee soorten kaarten:

- eerste rang a € 15,00 per kaartje
- tweede rang a € 12,00 per kaartje

De opbrengst was in totaal € 3225,00.

Hoeveel kaartjes voor de tweede rang zijn er verkocht?