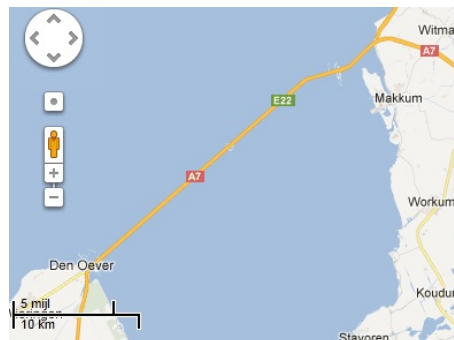


2.5 Breuken in vergelijkingen

Inleiding

Je rijdt in een auto over een rechte snelweg van 30 km lengte. Je reistijd is afhankelijk van de (constante) snelheid waarmee de auto rijdt. Je kunt die snelheid berekenen, door je reistijd te meten. Daarbij past een vergelijking waarin een breuk voorkomt...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen waarin breuken voor komen.

Voorkennis

- rekenen met breuken, ook als daar variabelen in voor komen;
- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- een vergelijking oplossen door de balansmethode te gebruiken en/of ontbinden in factoren.

Verkennen

Opgave V1

Je rijdt met de auto 30 km over de snelweg. Je hebt een constante (gemiddelde) snelheid. Maar je moet onderweg wel even stoppen om te tanken en dat kost 5 minuten.

- Als je 30 km met 120 km/uur rijdt, hoe lang doe je daar dan over? Geef je antwoord in minuten. Noem de snelheid in km/uur v en de reistijd in minuten t .
- Waarom is hier geen sprake van een omgekeerd evenredig verband?
- Welke formule geeft het verband tussen t en v weer?
- Welke vergelijking krijg je als je v wilt berekenen voor $t = 25$ minuten?
- Probeer deze vergelijking op te lossen.

Opgave V2

Je hebt als het goed is eerder geleerd hoe je twee breuken kunt optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Neem nu de breuken $\frac{2}{x}$ en $\frac{1}{2x}$.

- Laat zien hoe je beide breuken optelt en de tweede breuk van de eerste aftrekt.
- Laat zien hoe je beide breuken vermenigvuldigt.
- Laat zien hoe je de eerste breuk door de tweede deelt.

Uitleg

Op de **Afsluitdijk** ligt een snelweg van 32 km lengte. Hoe sneller je rijdt, hoe korter je over die 32 km doet. Je gebruikt onderweg 5 minuten voor het tanken van brandstof.

Je kunt de reistijd t in minuten berekenen door de afstand van 32 km te delen door de snelheid v (in km/h), met 60 te vermenigvuldigen en tenslotte nog 5 bij de uitkomst op te tellen:

$$t = \frac{32}{v} \cdot 60 + 5 = \frac{1920}{v} + 5.$$

Deze formule hoort bij een hyperbolisch verband.

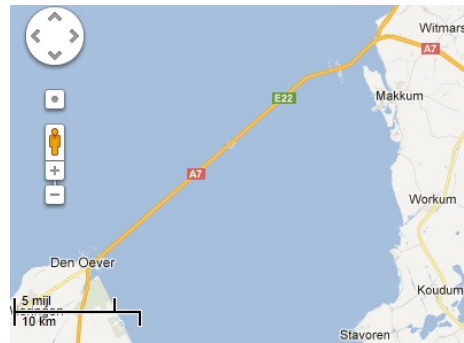
Wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25 \text{ oplossen.}$$

Dat kan in dit geval door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met bijvoorbeeld $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel 'analogierekenen'.

Deze manier van rekenen kun je echter niet altijd toepassen. Dat val je terug op de balansmethode. En dan moet je er rekening mee houden dat je niet door 0 kunt delen!



Figuur 2

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ dus } 2 = \frac{6}{3}$$

Figuur 3

Opgave 1

Je rijdt 32 km met een vrijwel constante snelheid v over de snelweg en je stopt onderweg 5 minuten om te tanken. Je totale reistijd is 25 minuten. Hoeveel bedraagt je snelheid?

- Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- Los deze vergelijking algebraïsch op.

Opgave 2

Voor het laten drukken van folders betaal je een vast bedrag van € 10,00 en daar bovenop € 0,04 per folder. De kosten per folder zijn daarom hoog als je maar weinig laat drukken.

Noem het aantal folders dat je wilt laten drukken a en de kosten per folder k . Je wilt weten voor welke waarde van a de kosten per folder 6 cent bedragen.

- Welke vergelijking kun je hierbij opstellen?
- Los deze vergelijking algebraïsch op.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een vergelijking waarbij de variabele in de noemer van een breuk voor komt heet een **gebroken vergelijking**.

Een voorbeeld is $\frac{1920}{v} + 5 = 25$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst aan beide zijden 5 af te trekken en vervolgens de vergelijking die je over houdt te vergelijken met $\frac{6}{2} = 3$.

Dit noem je wel **analogierekenen**.

Een ander voorbeeld van een gebroken vergelijking is $\frac{6}{x} + x = 5$.

Deze vergelijking kun je niet met analogierekenen oplossen. Nu gebruik je de balansmethode: beide zijden met x vermenigvuldigen. Maar dan moet wel $x \neq 0$ zijn. De meeste gebroken vergelijkingen kun je goed oplossen door te beginnen met links en rechts van het isgelijktteken te vermenigvuldigen met het kleinste gemeenschappelijke veelvoud (KGV) van alle noemers. Je bent dan de breuken kwijt.



$$\frac{6}{2} = 3 \quad \text{dus} \quad 2 = \frac{6}{3}$$

Figuur 4

Voorbeeld 1

Leg je een afstand van 32 km met een constante snelheid af, houd je onderweg 5 minuten pauze en wil je de snelheid uitrekenen bij een reistijd van 25 minuten, dan moet je de gebroken vergelijking:

$$\frac{1920}{v} + 5 = 25$$

oplossen. Dat kan met de balansmethode. Daarbij moet je er rekening mee houden dat je NIET door 0 kunt delen of beide zijden met 0 vermenigvuldigen! Hier zie je hoe dat gaat.

$$\begin{array}{l} \frac{1920}{v} + 5 = 25 \\ \frac{1920}{v} = 20 \\ 1920 = 20v \\ v = \frac{1920}{20} = 96 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{beide zijden } -5 \\ \text{beide zijden } \cdot v \\ \text{beide zijden } /20 \end{array}$$

Je rijdt dus 96 km/h.

Opgave 3

Bekijk hoe in **Voorbeeld 1** een gebroken vergelijking wordt opgelost met de balansmethode.

- Bij welke stap moet je rekening houden met het feit dat beide zijden van een vergelijking met 0 vermenigvuldigen niet mag?
- Waarom mag je beide zijden van een vergelijking niet met 0 vermenigvuldigen?
- Stel je nu voor dat je een afstand van 150 km aflegt met een constante snelheid en een tussentijdse pauze van 12 minuten. Je doet er 1:40 uur over. Hoe snel rijdt je?

Opgave 4

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies de handigste manier van werken.

- $12 - \frac{1}{x} = 8$
- $\frac{50}{2x-3} = 10$
- $\frac{6}{x} + x = 5$
- $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} = 10$

Opgave 5

Je wilt de vergelijking $\frac{x^2+9x-10}{x-1} = 0$ algebraïsch oplossen.

- Gebruik de balansmethode. Waarmee ga je beide zijden vermenigvuldigen? En waar moet je dan om denken?
- Los de vergelijking verder op.
- Eén van beide waarden die je bij c hebt gevonden hoort nu niet bij de oplossing. Hoe komt dat?

Voorbeeld 2

Wielrenner A doet over een afstand van 100 km precies 1 uur korter dan wielrenner B die gemiddeld 5 km/h langzamer rijdt. Hoe snel rijden ze gemiddeld?

Antwoord

De gemiddelde snelheid van A noem je v km/h, dan is die van B gelijk aan $v - 5$ km/h. Uit de tekst volgt dan de vergelijking:

$$\frac{100}{v} + 1 = \frac{100}{v-5}$$

Deze vergelijking los je op door beide zijden zowel met v als met $v - 5$ te vermenigvuldigen. Je vermenigvuldigt dus met $v(v - 5)$.

$$\text{Dit geeft } \frac{100}{v} \cdot v(v - 5) + 1 \cdot v(v - 5) = \frac{100}{v-5} \cdot v(v - 5).$$

$$\text{En dat wordt } 100(v - 5) + v(v - 5) = 100v.$$

Dit ga je verder oplossen. Je vindt $v = 25$ km/h.

A fietst gemiddeld met 25 km/h en B met 20 km/h.

Opgave 6

Bekijk hoe in **Voorbeeld 2** een gebroken vergelijking wordt gebruikt om de gemiddelde snelheid van twee wielrenners te berekenen.

- Ga na, dat de gegeven vergelijking bij het verhaal past.
- Laat zien hoe de vergelijking stap voor stap met de balansmethode kan worden opgelost.
- Waarom voldoet maar één van beide gevonden waarden voor v ?

Opgave 7

Twee automobilisten A en B rijden dezelfde afstand van 60 km met een constante snelheid. B rijdt 20 km/h langzamer dan A, maar A moet onderweg tanken en heeft daar 6 minuten voor nodig. Daardoor doen ze even lang over de gegeven afstand.

Hoe snel rijden ze?

Verwerken

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- $\frac{200}{a} + 0,3 = 0,7$
- $x - \frac{8}{x} = 2$
- $20 - \frac{p}{p-2} = 5$
- $\frac{600}{p^2+4} = 50$
- $\frac{3}{x} = 2 - \frac{4}{2x}$
- $\frac{3}{x} + \frac{x}{3} = \frac{10}{3}$

Opgave 9

Op veel scholen kunnen leerlingen kopieën maken. De kosten voor de school zijn:

- de huur en het onderhoud van de kopieermachine: € 240,00 per maand;
- de kosten per kopie: € 0,06;

Noem het aantal kopieën per maand a .

- Welke vergelijking kun je opstellen als de school maandelijks uit de kosten wil komen en elke leerling € 0,10 per kopie betaalt?
- Los deze vergelijking op.
- Hoeveel kopieën moeten er maandelijks worden gemaakt als de school uit de kosten wil komen?

Opgave 10

Voor een gas in een afgesloten ruimte geldt de **algemene gaswet**. Het verband tussen de druk p in pascal, het volume V in m^3 en T de temperatuur in kelvin is:

$$\frac{pV}{T} = c \text{ waarin } c \text{ een constante is.}$$

Omdat de temperatuur toeneemt met 80 kelvin, neemt de druk toe van 1,2 naar 1,5 pascal bij een gelijkblijvend volume van 4 m^3 .

- Welke vergelijking kun je opstellen bij deze situatie?
- Los deze vergelijking op.

Opgave 11

Iemand legt de 6 km van huis naar school altijd in dezelfde tijd af. Op een bepaalde dag vertrekt hij door omstandigheden 4 minuten te laat van huis. Hij komt precies in dezelfde tijd aan omdat hij 3 km/h sneller rijdt dan normaal.

Hoe hard rijdt hij normaal? Los dit probleem op met behulp van een vergelijking.

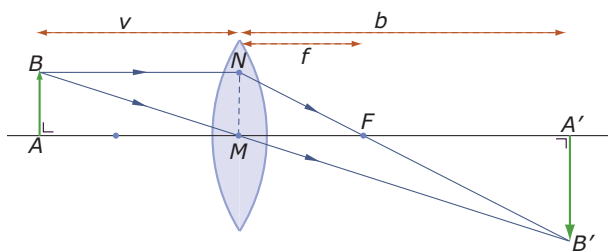
Opgave 12

Als er elektrische stroom loopt door een weerstand geldt de wet van Ohm: $V = I \cdot R$. Hierin is V het spanningsverschil in volt (V), I de stroomsterkte in ampère (A) en R de weerstand in ohm (Ω).

- Bereken het spanningsverschil ingeval $I = 2 \text{ mA}$ en $R = 1,5 \text{ M}\Omega$.
Ga uit van een constant spanningsverschil over een bepaalde stroomdraad van 24 V. Bij een stroomdraad waarvan de weerstand twee keer zo groot is wordt de stroomsterkte 10 mA kleiner.
- Hoeveel bedraagt de weerstand van deze stroomdraden?

Toepassen

In bijvoorbeeld een fotoestel of een verrekijker zitten lenzen. De standaardlens is een **sferische lens**, dat is een lens waarvan beide kanten delen van een bol vormen. De lijn door het midden M van zo'n lens noem je de hoofdas. Lichtstralen die evenwijdig aan de hoofdas op de lens vallen gaan na de lichtbreking allemaal door het brandpunt F van de lens. Lichtstralen die door het midden M gaan worden niet gebroken. Deze eigenschappen gelden alleen als de lens niet te dik en niet te groot is en als de beide boloppervlakken dezelfde straal hebben. In de figuur hieronder is dat zo. Het voorwerp AB krijgt aan de andere kant van een lens een beeld $A'B'$.



Figuur 5

In deze figuur kun je met behulp van gelijkvormigheid de zogenaamde **lenzenformule** afleiden:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Hierin is v de afstand van het voorwerp tot het midden van de lens (de voorwerpsafstand), b de afstand van het beeld tot het midden van de lens (de beeldsafstand) en f de afstand van het brandpunt tot het midden van de lens (de brandpuntsafstand). Deze formule geldt ook voor holle lenzen, en voor holle en bolle spiegels.

Opgave 13: De lenzenformule

Bekijk de lenzenformule in **Toepassen**. Als je de afstand v van het voorwerp tot (het midden van) de lens weet en de brandpuntsafstand f van de lens is bekend, dan kun je de beeldsafstand b berekenen.

- Neem $v = 10$ cm en $f = 4$ cm. Welke (gebroken) vergelijking moet je oplossen om b te berekenen?
- Hoe kun je van deze vergelijking in één klap een vergelijking zonder breuken maken?
- Los nu de vergelijking bij a op.
- Neem $v = 6$ cm en $f = 4$ cm en bereken de beeldsafstand.
- Als je zo'n berekening veel moet uitvoeren, dan is het handig om de lenzenformule te herleiden tot de vorm $b = \dots$. Laat zien hoe je dat kunt doen.

Opgave 14: Nog eens de lenzenformule

Gebruik de lenzenformule uit de voorgaande opgave.

Van een bepaalde lens is de brandpuntsafstand 3 cm. De beeldsafstand is 8 cm groter dan de voorwerpsafstand.

Bereken de voorwerpsafstand.

Testen

Opgave 15

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

- $\frac{40}{v} + 5 = 80$
- $\frac{15}{x} + \frac{30}{4x} = 45$
- $\frac{10}{5+x} = x + 2$

Opgave 16


Van een rechthoekig stuk land is de oppervlakte 1200 m^2 .

Dit stuk grond krijgt aan alle zijden een boswal die 3 m breed is. De oppervlakte van het stuk grond wordt daardoor 1674 m^2 . Bepaal met behulp van een vergelijking de lengte van de zijden van het oorspronkelijke stuk land.

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen met breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.


Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.



© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
