2.4 Ontbinden in factoren

Inleiding

Je hebt al kennis gemaakt met het ontbinden in factoren. Tot nu toe was dit een beetje iets dat "gewoon kan", maar het nut ervan ga je nu pas in dit onderdeel zien. Met name bij vergelijkingen waarin kwadraten of hogere machten voorkomen kan dit af en toe helpen bij het vinden van de oplossing. Helaas is het geen oplossing die altijd werkt...

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oplossing van een vergelijking bepalen door ontbinden in factoren te gebruiken.

Voorkennis

- de begrippen vergelijking en oplossing van een vergelijking;
- grafieken maken bij formules met twee variabelen en daarmee een bijpassende vergelijking oplossen;
- een vergelijking oplossen door terugrekenen of door de balsnamethode te gebruiken.

Verkennen

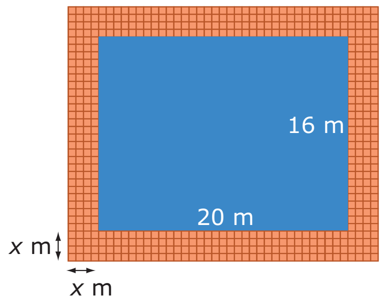
Opgave V1

Hiernaast zie je een plaatje van een zwembad en een tegelpad getekend. De afmetingen van dit zwembad zijn 20 bij 16 meter. Het tegelpad is x meter breed.

a Ga na dat de lengte van het zwembadterrein nu $20 + 2x$ meter is.

b Hoeveel is dan de breedte?

c Welke formule vind je zo voor de oppervlakte A van het hele zwembadterrein?



Figuur 2

Het zwembadterrein heeft een totale oppervlakte van 480 m^2. Hoe breed is het tegelpad?

d Welke vergelijking hoort er bij deze vraag?

e Hoe los je die vergelijking op?

Opgave V2

Vul op de stippeltjes een getal in:

a $2 \cdot ... = 0$

b $... \cdot 6 = 0$

c $... \cdot ... = 0$

d $... \cdot 0 = 0$

e Wat weet je van twee getallen waarvan het product 0 is?

Uitleg 1

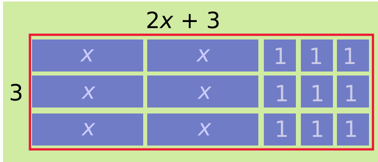
Je kunt al uitdrukkingen herleiden door haakjes uitwerken. Het omgekeerde, **ontbinden in factoren**, is lastiger. En toch kun je daarmee sommige vergelijkingen algebraïsch oplossen.

In de bovenste figuur zie je: $6x + 9 = 3 \cdot (2x + 3)$.
Dat komt omdat 3 de grootste gemeenschappelijke deler (ggd) van $6x$ en 9 is.

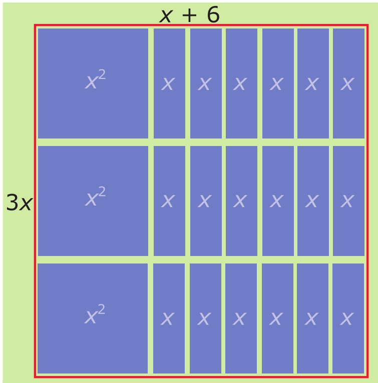
In de tweede figuur zie je: $3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$.
Dat komt omdat $3x$ de ggd van $3x^2$ en $18x$ is.

En hiermee kun je de vergelijking $3x^2 + 18x = 0$ oplossen.
Want omdat $3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$ kun je de vergelijking schrijven als $3x \cdot (x + 6) = 0$.
Nu heb je twee factoren met als product 0. En dat betekent $3x = 0$ en/of $x + 6 = 0$.
En dus moet $x = 0$ en/of $x = -6$.
In plaats van en/of gebruik je vanaf nu het teken $\vee$.
De oplossing van $3x^2 + 18x = 0$ is dus $x = 0 \vee x = -6$.

Je kunt je antwoorden controleren door beide x-waarden in de vergelijking in te vullen.



$6x + 9 = 3 \cdot (2x + 3)$



$3x^2 + 18x = 3x(x + 6)$

Figuur 3

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je met ontbinden in factoren de vergelijking $3x^2 + 18x = 0$ oplost.

a Leg uit hoe de ontbinding in zijn werk gaat.

b Hoe kun je de ontbinding controleren?

c Waarom helpt de ontbinding bij het oplossen van de vergelijking?

d Los nu zelf de vergelijking $4x^2 - 12x = 0$ op door ontbinden in factoren.

e Je hebt nu twee getallen gevonden die de vergelijking bij d waar zouden moeten maken. Laat door invullen zien dat dit ook inderdaad zo is.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op.

a $x^2 + 4x = 0$

b $3b - 9b^2 = 0$

c $c(-2c - 4) = 0$

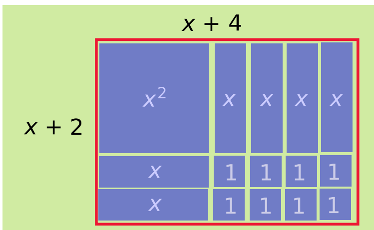
d $d^2 - \frac{1}{10}d = 0$

Uitleg 2

Tot nu toe heb je alleen tweetermen ontbonden in factoren. Het ontbinden van drietermen is lastiger. In de figuur en de tabel hiernaast kun je zien hoe de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$ in vieren kan worden opgesplitst.

Het product van de factoren $x + 2$ en $x + 4$ is $x^2 + 6x + 8$.
Dus $x^2 + 6x + 8 = (x + 2) \cdot (x + 4)$

Je ziet dat het getal 6 voor de x verdeeld wordt in een 4 en een 2. Dit geldt ook voor de 8. 6 is de som en 8 het product van 2 en 4. Deze methode heet de **som-product-methode**.
Je kunt de ontbinding controleren door in $(x + 2) \cdot (x + 4)$ de haakjes uit te werken.



×	x	4
x	x^2	$4x$
2	$2x$	8

Figuur 4

Met deze ontbinding kun je de vergelijking $x^2 + 6x + 8 = 0$ oplossen. Want deze vergelijking kun je na de ontbinding schrijven als $(x + 2) \cdot (x + 4) = 0$.
En dit betekent $x + 2 = 0 \vee x + 4 = 0$.
De oplossing wordt dan $x = -2 \vee x = -4$.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Je wilt de drieterm $x^2 + 5x + 6$ in factoren ontbinden.

a Welke twee gehele getallen hebben als product 6 en zijn opgeteld samen gelijk aan 5?

b Welke tabel kun je nu maken om de ontbinding te vinden? Welke ontbinding vind je?

c Los hiermee de vergelijking $x^2 + 5x + 6 = 0$ op.

d Controleer je oplossing door substitutie.

Opgave 4

Je wilt de vergelijking $x^2 + 27x + 72 = 0$ oplossen.

a Welke ontbinding heeft de drieterm: $x^2 + 27x + 72$?

b Hoe los je nu met behulp van die ontbinding de gegeven vergelijking op?

c Controleer door invullen dat beide x-waarden die je als oplossing hebt gevonden ook inderdaad de vergelijking waar maken.

Theorie en voorbeelden

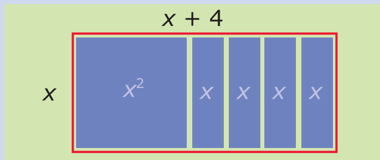
Om te onthouden

Een tweeterm kun je **ontbinden in factoren** door de grootste gemeenschappelijke deler **buiten haakjes** te halen. Hierbij kun je gebruik maken van een tabel.

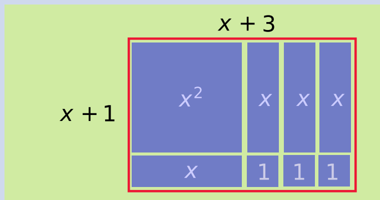
Een drieterm kun je ontbinden met de **som product methode**. Het getal voor de x is de som en het 'losse' getal het product van dezelfde twee getallen. Ook hierbij is een tabel handig.

Ontbinden in factoren kun je vaak toepassen om vergelijkingen op te lossen. De vergelijking kun je dan herleiden tot een product van factoren waar 0 uit komt. De vergelijking kun je dan schrijven in de vorm $a \cdot b = 0$. En omdat $a \cdot b = 0$ gelijkwaardig is met $a = 0 \vee b = 0$ kun je de vergelijking dan **splitsen** in twee eenvoudiger vergelijkingen.

Omdat dit splitsen alleen lukt bij een product waar 0 uit komt, moet je de vergelijking altijd eerst de vorm ... = 0 geven. Dat heet **op 0 herleiden**.



$x^2 + 4x = x \cdot (x + 4)$



$x^2 + 4x + 3 = (x + 1) \cdot (x + 3)$

Figuur 5

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $5x^2 = 25x$ op.

Antwoord

$$\begin{aligned} 5x^2 &= 25x \\ 5x^2 - 25x &= 0 \\ 5x \cdot (x - 5) &= 0 \\ 5x = 0 \;&\vee\; x - 5 = 0 \\ x = 0 \;&\vee\; x = 5 \end{aligned}$$

op 0 herleiden
linker zijde ontbinden in factoren
vergelijking splitsen
oplossing opschrijven

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Leg uit waarom het belangrijk is om de vergelijking eerst op 0 te herleiden de uitdrukking aan de linkerzijde van het isgelijkteken te ontbinden.

b Leg uit hoe deze vergelijkingen worden opgelost.

Opgave 6

Je wilt de vergelijking $3x^2 = 5x$ oplossen.

a Je gaat de vergelijking eerst op 0 herleiden en dan de linkerzijde ontbinden. Wat krijg je dan?

b Leg uit hoe de vergelijking wordt opgelost.

Voorbeeld 2

Los de vergelijking $x^2 + 14x + 45 = 0$ op.

Antwoord

Links van het isgelijkteken staat een drieterm die je probeert te ontbinden met de som-product-methode. Je zoekt daartoe een getallenpaar dat als som 14 en product 45 heeft. Uit de tabel hiernaast volgt dat dit het getallenpaar 5 en 9 is. De uitdrukking $x^2+14x+45$ kun je dus schrijven als $(x+5)\cdot(x+9)$.

Dit gebruik je om de vergelijking op te lossen.
Die kun je nu schrijven als $(x+5)\cdot(x+9)=0$.
Nu kan een product van twee factoren alleen 0 zijn als minstens één van beide factoren 0 is. Dus $x+5=0 \vee x+9=0$. De oplossing daarvan is: $x=-5 \vee x=-9$.

getallenpaar	som	product
1 en 45	46	45
-1 en -45	-46	45
3 en 15	18	45
-3 en -15	-18	45
5 en 9	14	45
-5 en -9	14	45

Tabel 1

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**. Neem nu de vergelijking $x^2 - 14x + 45 = 0$.

a Laat zien hoe je nu de linkerzijde kunt ontbinden in factoren.

b Laat zien hoe je nu verder deze vergelijking oplost.

c Controleer of de gevonden oplossingen de vergelijking ook inderdaad waar maken.

Opgave 8

Los de volgende vergelijkingen op:

a $x^2 + 12x - 45 = 0$

b $x^2 - 12x - 45 = 0$

Opgave 9

Beantwoord de volgende vragen.

a Leg uit wat het verschil is tussen een tweeterm en een drieterm. Geef bij elk een voorbeeld.

b Leg uit hoe je een tweeterm kunt ontbinden. Geef hierbij een voorbeeld.

c Leg uit hoe een drieterm kan worden ontbonden. Geef hierbij een voorbeeld.

d Kun je een drieterm altijd ontbinden in factoren?

Voorbeeld 3

Los de vergelijking $2x^2 = 10x - 8$ op.

Antwoord

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 10x - 8 && \text{op 0 herleiden} \\ 2x^2 - 10x + 8 &= 0 && \text{beide zijden /2} \\ x^2 - 5x + 4 &= 0 && \text{linker zijde ontbinden in factoren} \\ (x-1)(x-4) &= 0 && \text{vergelijking splitsen} \\ x - 1 = 0 &\lor x - 4 = 0 && \text{oplossing opschrijven} \\ x = 1 &\lor x = 4 \end{aligned}$$

Opgave 10

Bekijk de vergelijking van **Voorbeeld 3**.

a Los eerst zelf deze vergelijking op zonder naar het antwoord te kijken.

b Heb je in je oplossing dezelfde stappen in dezelfde volgorde gezet?

c Los nu op dezelfde manier op: $5x^2 - 10x = 15$.

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen op.

a $a^2 + 2a = 35$

b $(b-2)(2b+3) = 0$

c $x^2 - 15 = 2x$

d $3x^2 - 45 = -6x$

Verwerken

Opgave 12

Los de volgende vergelijkingen, indien mogelijk, op met behulp van ontbinden in factoren.

a $3x^2 - 36x = 0$

b $x^2 = x$

c $c^2 + 2c = 35$

d $k^2 - 9 = 7$

e $2x^2 - 4x - 16 = 0$

f $2x^2 - 4x - 17 = 0$

Opgave 13

Een boer wil een rechthoekig stuk grond afzetten van 1200 m^2. De breedte is 10 meter korter dan de lengte.

Hoe lang en hoe breed wordt het stuk grond?

Opgave 14

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Kies zelf de handigste methode.

a $(x-5)(2x-6) = 0$

b $(x-5)(2x-6) = 30$

c $2(x-3)^2 = 8x$

d $2(x-3)^2 = 18$

Opgave 15

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met ontbinden via **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Opgave 16

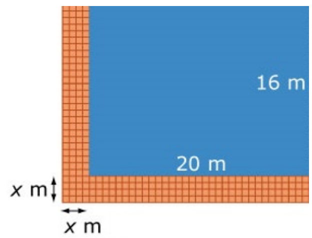
Een vierkant heeft zijde x. Een rechthoek heeft zijden $5 - x$ en $8 - 2x$. Voor welke waarde van x zijn de oppervlakten van het vierkant en de rechthoek even groot?

Opgave 17

De formule $y = x^2 + ax - 14$ is ontbonden als $y = (x - 7)(x + b)$. Bereken a en b.

Toepassen

Hiernaast zie je weer een plaatje van een zwembad van 16 bij 20 meter. Om de helft van het zwembad heen is een tegelpad aangelegd. De breedte van dit tegelpad is x cm. Een tegelzetter heeft 160 m^2 aan tegels nodig gehad om het tegelpad aan te leggen.
Je kunt nu met behulp van ontbinden in factoren zelf uitrekenen hoeveel de breedte van dit zwembad bedraagt.



Figuur 6

Opgave 18: Zwembadprobleem

Bekijk het zwembadprobleem in **Toepassen**.

Los dit probleem op met behulp van ontbinden in factoren.

Opgave 19: Landruil

Boer Harmsen heeft een groot vierkant stuk land. Aan de oostzijde van dit land wil het waterschap een afwateringskanaal van 12 m breed aanleggen. Dit betekent dat de breedte van deze sloot van het land van de boer afgaat. Hij wil daarvoor compensatie en krijgt aan de zuidzijde van zijn land een extra strook van 16 m breedte toegewezen.
De boer is tevreden, zijn land is 40 m^2 groter geworden.

Bereken hoe groot de oppervlakte van boer Harmsen's land nu geworden is.

Testen

Opgave 20

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op.

a $x^2 - 19x = 66$

b $(2p - 4)(3p + 18) = 0$

c $(2p - 4)(3p + 18) = 24p$

d $6x^3 = 54x$

Opgave 21

Van een rechthoekig stuk land is de lengte 4 m groter dan de breedte.

Dit stuk grond krijgt aan alle zijden een boswal die 3 m breed is. De oppervlakte van het stuk grond wordt daardoor 480 m^2. Bepaal met behulp van een vergelijking de lengte van de zijden van het oorspronkelijke stuk land.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van vergelijkingen door ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↺ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.