1.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je vooral vaardigheden op het gebied van de algebra (het rekenen met variabelen) geleerd. Hopelijk heb je deze vaardigheden zo goed geoefend dat je ze de komende jaren echt 'in de vingers hebt'. Bij veel van de onderwerpen die je al dit jaar tegenkomt zul je ze nodig hebben, maar in de toekomst zul je (zeker als je wiskunde B gaat kiezen) merken dat ze onontbeerlijk zijn.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **Algebra** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippenlijst

- variabelen — gelijksoortige en ongelijksoortige termen — wisseleigenschap — commutatieve bewerking;
- breuken — gelijknamig maken — kleinste gemeenschappelijke veelvoud — KGV;
- tweeterm — vierterm — distributieve eigenschap — haakjes uitwerken — ontbinden in factoren — grootste gemeenschappelijke deler — GGD;
- macht — grondtal — exponent — wetenschappelijke notatie;
- wortel — worteltrekken — nde machts worteltrekken.

Activiteitenlijst

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met variabelen, formules en uitdrukkingen herleiden, gelijksoortige termen;
- breuken vereenvoudigen, gelijknamig maken, optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, het KGV;
- haakjes uitwerken en ontbinden in factoren, de GGD en de som-en-productmethode;
- rekenen met machten met gehele exponenten, de wetenschappelijke notatie van getallen;
- rekenen met (hogere machts) wortels, wortelvormen herleiden.

Opgave 1

Een belangrijke algebraïsche vaardigheid is het herleiden van uitdrukkingen met het doel ze eenvoudiger te maken. Een eenvoudiger uitdrukking betekent meestal dat je er minder tekens, minder symbolen voor nodig hebt. Dat kunnen ook uitdrukkingen met haakjes, breuken, machten en wortels zijn.

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen en schrijf ze (waar breuken voorkomen) als één breuk.

a $5a + 2b - 3a - b$

b $5a \cdot 2b - 3a \cdot \text{-}b$

c $\frac{1}{2p} + \frac{2}{q}$

d $\frac{1}{2p} - \frac{2}{p+1}$

e $(x+2)(x+1) - x(x+1)$

f $4 - (x+2)^2$

g $p^2 \cdot (2p)^3 - 2p^2 \cdot 4p^3$

h $\left(p^3 - 2\right)^2 - p^4\left(p^2 + 1\right)$

Opgave 2

Wanneer je in bepaalde uitdrukkingen getallen wilt invullen voor de variabelen, is het verstandig om ze eerst zo eenvoudig mogelijk te schrijven. Bereken de volgende uitdrukkingen voor $a = 4$ en $b = -6$.

a $\frac{4ab^3}{3ab}$

b $2a(b-1) - 2b(a-1)$

c $\frac{1}{2ab} + \frac{3}{ab}$

d $(a+b)^2 - (a-b)^2$

Opgave 3

Schrijf de volgende formules zo, dat y is uitgedrukt in x, dus in de vorm $y = ...$

a $4x - 2y = 7$

b $x(y-2) = 5$

c $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$

d $\frac{2y}{x+1} = 4$

Opgave 4

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $12p^3q - 16pq^2$

b $12a^3 - 4a$

c $k^2 - 2k - 80$

d $32 + k^2 + 12k$

e $84 - 2x - 2x^2$

f $4m^2 - 1$

Opgave 5

Gegeven zijn de getallen $p = 5{,}4 \cdot 10^9$, $q = 3{,}1 \cdot 10^8$ en $r = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$. Schrijf bij de volgende berekeningen het antwoord ook in de wetenschappelijke notatie.

a Bereken $p + q$.

b Bereken $p \cdot q$.

c Bereken $p \cdot r$.

d Bereken $1/p$.

Opgave 6

Het vereenvoudigen en samennemen van wortelvormen is ook een nuttige vaardigheid. Vereenvoudig:

a $2\sqrt{21} + 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{7}$

b $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

c $\sqrt{96} - \sqrt{24}$

d $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

e $\sqrt[5]{10^2 - 7^3}$

Testen

Opgave 7

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen.

a $5x^2 + 6x - x(x + 3)$

b $\left(p^2 - 4\right)\left(p^2 + 4\right) - p^3(p + 1)$

c $4ab^2 - 2a^2b + 6ab \cdot 4a - 6ab \cdot 4b$

d $4p - (8 - 4p)$

e $(x - 1)^2 - (x - 1)(x + 1)$

f $(\text{-}2a)^3 \cdot 3b^2 - 6ab \cdot \text{-}4a^2b$

Opgave 8

Schrijf de volgende uitdrukkingen als één breuk.

a $\frac{4}{a} + \frac{5}{b}$

b $\frac{4}{10}p \cdot \frac{5p}{8p^2}$

c $\frac{2}{3k} + \frac{3}{k} \cdot \frac{5}{k}$

d $\frac{2}{k+2} - \frac{1}{k}$

e $\frac{\text{-}p}{3q} \Big/ \frac{2}{5q}$

f $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

Opgave 9

Bereken als $p = 4$, $q = \text{-}5$ en $r = 3$.

a $\frac{3p^2q}{\text{-}4pqr}$

b $(\text{-}2p)^4 + 6p^6 \Big/ \left(\text{-}2p^2\right)$

c $4q(2r + p) - 2p(1 + 2q)$

Opgave 10

Herleid de volgende uitdrukkingen tot y is uitgedrukt in x.

a $x - 2y = 6$

b $2xy = 13$

c $\frac{x}{2y} = 12$

d $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$

Opgave 11

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $4x^2 - 6x$

b $4x^3y - 6xy^3$

c $4x^2 - 4$

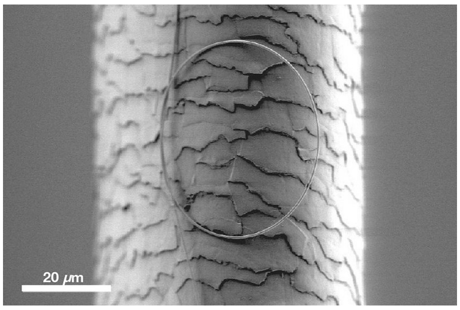
d $x^2 - 9x - 22$

e $4x^2 + 40x + 64$

f $2x + x^2 - x^3$

Opgave 12

In de **nanotechnologie** gaat het om hele kleine afstanden: 1 nm (nanometer) is $1 \cdot 10^{-9}$ m. Dit is een schaal van grootte die net boven die van atomen (0,060 nm tot 0,275 nm) en eenvoudige moleculen ligt. Hiernaast zie je een foto van een koolstofnanobuis die in een lus op een haar ligt. Gebruik in deze opgave steeds de wetenschappelijke notatie.



Figuur 1

a Hoeveel m is de grootte van een atoom dat 0,060 nm is?

b Je ziet in de figuur een afstand van 20 μm aangegeven door een balkje. Hoeveel m is 20 μm?

c Hoeveel balkjes van 20 μm gaan er in een haar van 16 cm?

d Schat de diameter van de koolstofnanobuis. Hoeveel van die nanobuizen tegen elkaar hebben dezelfde diameter als één haar?

Opgave 13

Schrijf de volgende uitdrukkingen met wortels zo eenvoudig mogelijk en in ieder geval zonder wortelteken in de noemer van een breuk.

a $4\sqrt{6} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

b $\frac{18\sqrt{30}}{3\sqrt{6}}$

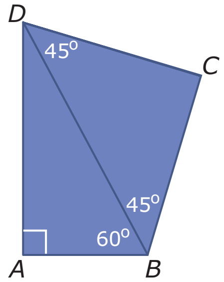
c $\sqrt{32} - \sqrt{8}$

d $\frac{3}{\sqrt{2}}$

e $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$

Opgave 14

Deze vierhoek $ABCD$ bestaat uit twee driehoeken. Neem eerst aan dat $AD = 3$ cm.



Figuur 2

a Bereken de omtrek van vierhoek $ABCD$.

b Bereken de oppervlakte van vierhoek $ABCD$.

Neem nu aan dat de lengtes van de zijden onbekend zijn. De oppervlakte van vierhoek $ABCD$ is $2 + \sqrt{3}$.

c Bereken nu de exacte lengte van de zijden van de vierhoek.

Toepassen

In de volgende opgaven leer je de som-en-productmethode voor het ontbinden in factoren toepassen in situaties met hogere machten. Vooral als je later wiskunde B wilt kiezen kom je dat af en toe tegen. Een leuke manier van ontbinden is ook de staartdeling. Maar die is alleen bruikbaar als je weet welke factor je buiten haakjes wilt halen. Later zul je bij wiskunde B nog manieren tegen komen waarmee je kunt herkennen in welke situaties dat bruikbaar is.

En tenslotte tref je nog een opgave aan die gaat over het rekenen met getallen in de wetenschappelijke notatie. Daarmee zul je bij alle wiskundevakken in de bovenbouw gaan werken.

Opgave 15: Bijzondere ontbindingen

Bekijk de uitdrukking $x^6 + 5x^3 + 6$.

a Leg uit waarom je deze uitdrukking kunt schrijven als $p^2 + 5p + 6$.

b Ontbind $p^2 + 5p + 6$ met de som-en-productmethode.

c Schrijf nu de juiste ontbinding op voor $x^6 + 5x^3 + 6$.

d Waarom kun je $x^5 + 5x^3 + 6$ niet op deze manier ontbinden in factoren?

Je kunt deze manier van ontbinden in factoren af en toe toepassen. Ontbind:

e $x^4 - 3x^2 - 18$

f $x^{10} - 12x^5 + 32$

g $2 - x^3 - x^6$

h $x^{12} - 13x^6$

Opgave 16: Vermenigvuldigen en delen

Ook uitdrukkingen met letters kun je gewoon vermenigvuldigen door 'onder elkaar zetten' en delen met behulp van een staartdeling. Hier zie je daar twee eenvoudige voorbeelden van. In de figuur hieronder wordt de vermenigvuldiging $(2x + 1) \cdot (x - 3)$ uitgevoerd.

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ \underline{x - 3} \; \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ \underline{x - 3} \; \times \\ -6x - 3 \end{array}$$

Eerst vermenigvuldigen met -3.

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ \underline{x - 3} \; \times \\ -6x - 3 \\ 2x^2 + x \quad\;\; \end{array}$$

Daarna vermenigvuldigen met x.

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ \underline{x - 3} \; \times \\ -6x - 3 \\ \underline{2x^2 + x \quad\;\;} \; + \\ 2x^2 + 5x - 3 \end{array}$$

Tenslotte alles optellen

Figuur 3

In het volgende voorbeeld wordt $2x^2 - 5x - 3$ gedeeld door $x - 3$.

$$2x^2 - 5x - 3 \;/\; x - 3 =$$

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 5x - 3 \;/\; x - 3 = 2x \\ 2x^2 - 6x \end{array}$$

Begin bij de hoogste macht. Hoe vaak gaat $x - 3$ in $2x^2$?

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 5x - 3 \;/\; x - 3 = 2x \\ \underline{2x^2 - 6x \; -} \\ \qquad\quad x - 3 \end{array}$$

Bereken $2x(x - 3)$ en trek dat af van $2x^2 - 5x - 3$.

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 5x - 3 \;/\; x - 3 = 2x + 1 \\ \underline{2x^2 - 6x \; -} \\ \qquad\quad x - 3 \\ \qquad\quad x - 3 \end{array}$$

Kijk nu hoe vaak $x - 3$ gaat in x. Dat gaat precies 1 keer.

$$\begin{array}{l} 2x^2 - 5x - 3 \;/\; x - 3 = 2x + 1 \\ \underline{2x^2 - 6x \; -} \\ \qquad\quad x - 3 \\ \qquad\quad \underline{x - 3 \; -} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Bereken $1(x - 3)$ en trek dat van $x - 3$ af. Je komt op 0 uit, de deling komt uit.

Figuur 4

a Voer zelf zowel de vermenigvuldiging als de deling uit. Waarom horen er in de deling eigenlijk haakjes te staan?

Eerst even een paar vermenigvuldigingen oefenen. Bereken:

b $(3x + 5)\,(2x - 1)$

c $\left(x^2 + 5x - 6\right)(2x - 4)$

En nu een paar delingen oefenen. Bereken:

d $\left(3x^2 + 15x + 18\right) / (x + 3)$

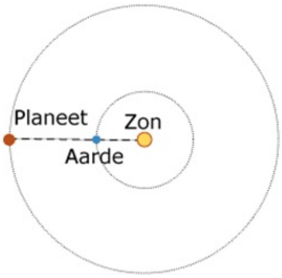
e $\left(3x^3 + 17x^2 - 54x + 16\right) / (3x - 1)$

f Gebruik nu je antwoord bij e om $3x^3 + 17x^2 + 42x + 16$ in factoren te ontbinden.

Opgave 17: Oppositie van planeten

Wanneer een planeet gezien vanuit de zon met de Aarde op één lijn ligt, zeg je dat deze planeet in oppositie staat. Oppositie komt bij elke planeet met vaste tussenpozen voor. De tijd T (in dagen) tussen twee opposities hangt af van de omlooptijd van de Aarde T_A (in dagen) om de zon en de omlooptijd van de planeet T_P (in dagen) om de zon.

Er geldt: $\frac{1}{T_P} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T}$.



Figuur 5

a Hoe verder een planeet van de zon af staat hoe groter T_P. Betekent dit dat dan ook T groter wordt?

b Tussen twee opposities van Jupiter zitten 398,6 dagen. Bereken de omlooptijd van Jupiter in dagen nauwkeurig. De omlooptijd van de Aarde is 365,25 dagen.

c De omlooptijd van Mars is 1,88 jaar. Bereken de tijd tussen twee opposities in dagen nauwkeurig.

Alle planeten van ons zonnestelsel voldoen aan de wet van Kepler die zegt dat ${T_P}^2 = 3{,}95 \cdot 10^{-20} \cdot r^3$ waarin r de gemiddelde afstand van de planeet tot de zon in km is.

d Voor Saturnus geldt $r \approx 1{,}43 \cdot 10^9$ km. Bereken de tijd tussen twee opposities van Saturnus in dagen nauwkeurig.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.