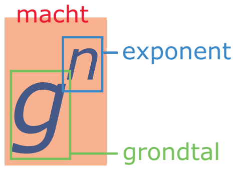
1.4 Machten

Inleiding

Machten ontstaan door herhaaldelijk hetzelfde te vermenigvuldigen.

Dat kun je ook met variabelen doen: $x \cdot x \cdot x = x^3$.

En dan kun je weer uitdrukkingen met variabelen en machten herleiden...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met machten van variabelen;
- uitdrukkingen met variabelen waarin machten voorkomen vereenvoudigen door haakjes weg te werken;
- het rekenen met machten gebruiken bij rekenen met getallen in de wetenschappelijke notatie.

Voorkennis

- rekenen met machten en de wetenschappelijke notatie gebruiken;
- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden, ook met breuken;
- uitdrukkingen met variabelen waarin haakjes voorkomen vereenvoudigen door haakjes weg te werken;
- ontbinden in factoren door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te halen en/of met behulp van de som-product-methode.

Verkennen

Opgave V1

Een **kettingbrief** is een brief die elke ontvanger enige malen moet kopiëren en vervolgens door moet sturen (dit kan ook digitaal). Je ziet hiernaast een voorbeeld, op de stippeltjes vul je natuurlijk het adres van een goed doel in. Stel je begint door vijf vrienden zo'n brief te sturen en die sturen hem weer door naar vijf van hun vrienden, enzovoort. Stel verder dat niemand van twee of meer personen deze zelfde brief krijgt.

Voorbeeld kettingbrief

Stuur deze brief door naar vijf van jouw vrienden en maak 1 euro over naar ...

Figuur 2

a Waarom is het aantal brieven dat jouw vrienden versturen dan 5^2? En wat stelt 5^3 voor?

5^2 en 5^3 zijn machten van 5. Als de kettingbrief steeds door gaat is het aantal brieven dat elke nieuwe groep ontvangers verstuurd steeds 5 keer zo groot en krijg je nog hogere machten van 5.

b Hoeveel is 5^4?

c Laat zien, dat $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.

d Laat ook zien, dat $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Opgave V2

In de eerste ronde worden er 5 brieven verstuurd, in de tweede ronde 5^2, in de derde ronde 5^3, enzovoorts.

a Hoeveel brieven worden er in de vierde ronde verstuurd? En in de achtste?

b Leg uit waarom $\left(5^4\right)^2 = 5^8$.

c Hoeveel is $\left(5^4\right)^6$? (Geef je antwoord als macht van 5.)

Opgave V3

Als je machten van 5 uitrekent, krijg je als snel gigantische bedragen. Dat is leuk voor je goede doel als de kettingbrief blijft doorlopen en iedereen die éne euro overmaakt.

a Hoeveel is 5^{10}?

b Waarom is het onwaarschijnlijk dat deze kettingbrief lang blijft doorlopen?

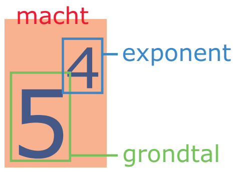
Grote getallen geef je weer met de wetenschappelijke notatie $a \cdot 10^n$ met n een geheel getal en $1 \leq a < 10$.

c Schrijf 5^{10} in de wetenschappelijke notatie afgerond op twee decimalen nauwkeurig.

d In welke ronde zou het aantal brieven dat wordt verstuurd ongeveer gelijk zijn aan de totale wereldbevolking?

Uitleg

Een ‘macht’ is een herhaalde vermenigvuldiging: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Het getal waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het ‘grondtal’ van de macht en het aantal keren dat je die vermenigvuldiging doet heet de ‘exponent’.



Figuur 3

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $5^6 / 5^2 = 5^4$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $5^0 = 1$.
- Als je een macht weer tot een bepaalde macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $\left(5^4\right)^2 = 5^8$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $5^{-3} = 5^{0-3} = 5^0 / 5^3 = \frac{1}{5^3}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de ‘wetenschappelijke notatie’ van hele grote en hele kleine getallen.

Een getal zoals 135 miljard = 135000000000 schrijf je als:
$135000000000 = 1{,}35 \cdot 100000000000 = 1{,}35 \cdot 10^{11}$.

Een getal zoals 31 miljoenste = 0,000032 schrijf je als:
$0{,}000032 = 3{,}2 \cdot 0{,}00001 = 3{,}2 \cdot \frac{1}{100000} = 3{,}2 \cdot 10^{-5}$.

In de wetenschappelijke notatie schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal is.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met machten kunt rekenen. Deze rekenregels zijn vooral nuttig als de grondtallen en de exponenten groot zijn.

a Je rekenmachine kan $5^{200} / 5^{198}$ waarschijnlijk niet voor je uitrekenen. Toch kun je dit zelf wel. Laat dat zien.

b Bereken $\frac{19^{121} \cdot \left(19^{50}\right)^2}{19^{220}}$.

Je ziet in de uitleg dat ook 0 en zelfs negatieve getallen als exponent kunnen voorkomen. Bij delen mag je de exponenten van elkaar aftrekken.

c Laat zien dat daaruit volgt dat $5^0 = 1$.

d Laat zien dat daaruit volgt dat $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$.

e Bereken $\left(15^{14}\right)^{10} \cdot 15^{108} / 15^{250}$.

Opgave 2

Werk met de rekenregels voor machten en herleid zo ver mogelijk. Neem aan dat $a \neq 0$.

a $a^5 \cdot a^2$

b $3a^5 \cdot 4a^2$

c $3a^5 / 4a^2$

d $(3a^5)^4$

e $(\text{-}2a^3)^4 \cdot a^3 / (\text{-}2a^5)^3$

Opgave 3

De omtrek van de Aarde is 40000 km.

a Hoeveel m is dat? Geef je antwoord in de wetenschappelijke notatie.

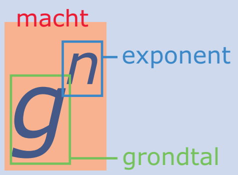
b Een nanometer is 1 miljardste m. Schrijf dit getal in de wetenschappelijke notatie.

c Hoeveel nanometer is de omtrek van de Aarde? Laat zien hoe je daarbij met getallen in de wetenschappelijke notatie rekent.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Een **macht** is een herhaalde vermenigvuldiging, notatie g^n. Het getal g waarmee je steeds vermenigvuldigt heet het **grondtal** van de macht en het aantal keren n dat je die vermenigvuldiging doet heet de **exponent**.



Figuur 4

Het werken met machten ken je al:

- Als je twee machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigt, kun je de exponenten optellen: $g^a \cdot g^b = g^{a+b}$.
- Als je twee machten met hetzelfde grondtal deelt, kun je de exponenten aftrekken: $g^a / g^b = g^{a-b}$.

Hieruit volgt meteen:

- Een macht met exponent 0 heeft als uitkomst 1: $g^0 = 1$.
- Als je een macht weer tot een bepaalde macht verheft, kun je de exponenten vermenigvuldigen: $(g^a)^b = g^{a \cdot b}$.
- Ook negatieve exponenten komen voor: $g^{\text{-}a} = \frac{1}{g^a}$.

Deze rekenregels gelden in het algemeen voor machten met een willekeurig grondtal (bij delingen is het grondtal ongelijk aan 0) en een gehele exponent.

Ze zijn vooral nuttig bij het werken met de **wetenschappelijke notatie** van hele grote en hele kleine getallen.
In de wetenschappelijke notatie schrijf je een getal in de vorm $a \cdot 10^n$, waarbij $1 \leq a < 10$ en n een geheel getal is.

Voorbeeld 1

Hier zie je enkele voorbeelden van het werken met machten. Denk er om dat je alleen gelijksoortige termen kunt optellen en aftrekken.

- $2a^7 \cdot 5a^4 = 2 \cdot 5 \cdot a^7 \cdot a^4 = 10a^{7+4} = 10a^{11}$
- $\frac{2a^7}{5a^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a^7}{a^4} = 0{,}4a^{7-4} = 0{,}4a^3$
- $\frac{5a^4}{2a^7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a^4}{a^7} = 2{,}5 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{2{,}5}{a^3}$
- $(\text{-}2a^3)^4 = \text{-}2a^3 \cdot \text{-}2a^3 \cdot \text{-}2a^3 \cdot \text{-}2a^3 = 16a^{12}$
- $(\text{-}2a^3)^4 + (a^2)^6 = 16a^{12} + a^{12} = 17a^{12}$
- $18a^2b^3 - (2ab)^2 \cdot 3b = 18a^2b^3 - 12a^2b^3 = 6a^2b^3$

Opgave 4

Bekijk de herleidingen in **Voorbeeld 1** en loop ze even na. Herleid zelf de volgende uitdrukkingen.

a $6a^5b^2 \cdot 2a^3b$

b $\frac{6a^5b^2}{2a^3b}$

c $(4a)^2 - 4a^2$

d $a^3 \cdot 2b + 2(ab)^2$

e $8a^3 \cdot 2ab^2 - \left(2a^2b\right)^2$

f $\frac{2a \cdot (-2b)^3}{b^2 \cdot 4ab}$

Opgave 5

Ook bij het uitwerken van haakjes kun je met machten te maken krijgen. Werk in de volgende uitdrukkingen de haakjes uit en herleid ze zover mogelijk.

a $2p^3\left(1 - 6p^2\right)$

b $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 1\right)$

c $\left(y^3 - 2\right)^2$

d $4k^2(k + 3) - 2k\left(k^2 - 4\right)$

e $\left(4 + 3k^2\right)^2 - \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right)$

f $(p + 1)^3$

Opgave 6

Uitdrukkingen met machten die uit meerdere termen bestaan kun je soms ontbinden in factoren. Hieronder zie je dergelijke uitdrukkingen. Ontbind ze zover mogelijk.

a $2k^4 + 6k^3$

b $a^2b^3 - 4a^3b^5$

c $x^3 - 4x$

d $24a^2 - 8a^3 + 2a^4$

Voorbeeld 2

Deze getallen zijn geschreven in de wetenschappelijke notatie: $a = 3{,}6 \cdot 10^{13}$, $b = 1{,}2 \cdot 10^{12}$, $c = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ en $d = 9{,}0 \cdot 10^{-7}$.

Bereken $a + b$, $a \cdot c$, $c - d$ en a/d. De antwoorden geef je dan natuurlijk ook in de wetenschappelijke notatie!

Antwoord

Let vooral op het werken met de machten van 10. Alleen gelijksoortige uitdrukkingen mag je optellen of aftrekken.

- $a + b = 3{,}6 \cdot 10^{13} + 1{,}2 \cdot 10^{12} = 3{,}6 \cdot 10^{13} + 0{,}12 \cdot 10^{13} = 3{,}72 \cdot 10^{13}$
- $a \cdot c = 3{,}6 \cdot 10^{13} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-6} = 4{,}32 \cdot 10^{7}$
- $c - d = 1{,}2 \cdot 10^{-6} - 9{,}0 \cdot 10^{-7} = 12{,}0 \cdot 10^{-7} - 9{,}0 \cdot 10^{-7} = 3{,}0 \cdot 10^{-7}$
- $\frac{a}{d} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{13}}{9{,}0 \cdot 10^{-7}} = 0{,}4 \cdot 10^{20} = 4{,}0 \cdot 10^{19}$

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** zie je hoe je met getallen in de wetenschappelijke notatie rekent.

a Probeer de vier voorbeelden eerst zelf uit te rekenen zonder naar de oplossing te kijken. Schrijf je antwoorden ook in de wetenschappelijke notatie.

b Bereken $a \cdot d$.

c Bereken $a - b$.

d Bereken b^3.

e Waarom is $a - c \approx a$?

Opgave 8

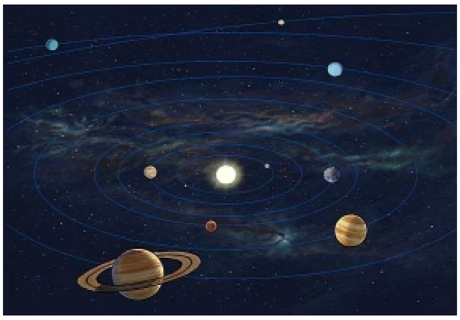
De astronomische eenheid (AE) is de gemiddelde afstand van de Aarde tot de Zon. 1 AE $\approx 1{,}5 \cdot 10^8$ km.

a Hoeveel AE is 1 km?

b Planeet Jupiter bevindt zich ongeveer 5,2 AE van de zon. Hoeveel km is dat?

c Pluto bevindt zich ongeveer $5{,}9 \cdot 10^9$ km van de zon. Hoeveel AE is dat?

d Een lichtjaar is de afstand die het licht in een jaar aflegt. De lichtsnelheid is $3 \cdot 10^8$ m/s. Hoeveel AE is 1 lichtjaar?



Figuur 5

Verwerken

Opgave 9

Bereken $\frac{8^{60} \cdot 2^{200}}{4^{192}}$ door met machten van 2 te rekenen.

Opgave 10

Werk eventuele haakjes weg en herleid zover mogelijk.

a $3p^2q^3 \cdot \text{-}2pq^2$

b $\frac{3p^2q^3}{\text{-}2pq^2}$

c $(3k^2)^3 + 2k^2 \cdot k^3 - 2k^2 \cdot 5k^4$

d $3a^2(ab^2 - 2b) - 2ab(a^2b - a)$

e $(x^3 + 5)^2 - x^2 \cdot x^4$

f $\frac{2a^2b + 3ab^2}{2ab}$

g $p^5(p^2 - 4)(p^2 + 1)$

h $2x(3y^2)^3 - 2xy \cdot y^5$

Opgave 11

Ontbind in factoren.

a $12k^6 - 18k^3$

b $4ab^3 + 12a^2b - 4ab$

c $x^5 - x^4 - 2x^3$

d $4x - 8x^2 + 4x^3$

Opgave 12

Alle stoffen bestaan uit atomen. Die atomen hebben een zekere massa, de atoommassa. Die atoommassa wordt uitgedrukt in een eenheid u die gelijk is aan ééntwaalfde deel van een koolstof-12 atoom, namelijk $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gram.

a Het koolstof-12 atoom heeft dus een massa van 12 u. Hoeveel gram is dat?

b Uit hoeveel atomen bestaat 12 gram koolstof-12?

Waterstof heeft een atoommassa van ongeveer 1 u en zuurstof een atoommassa van ongeveer 16 u.

c Laat zien dat 1 gram waterstof en 16 gram zuurstof evenveel atomen bevatten.

Water heeft moleculen die bestaan uit 1 atoom zuurstof en 2 atomen waterstof. De molecuulmassa is daarom 18 u.

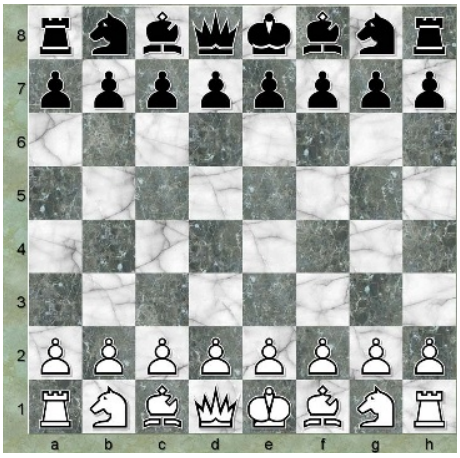
d Hoeveel moleculen zitten er in 1 kg (dat is 1 liter) water?

Opgave 13

Oefen het werken met machten van variabelen via het **Practicum**.

Toepassen

Sissah Ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissah Ben Dahir zei: “Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken.”
De koning lachte en antwoordde: “Is dat echt alles dat je wilt hebben?” en hij gaf opdracht het graan uit te betalen. Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissah uit te betalen, liet hij hem in de gevangenis opsluiten.



Figuur 6

Opgave 14: Sissah ben Dahir

Bekijk het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen**. Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op het tiende vakje leggen?

b Hoeveel graankorrels komen er op het 64ste vakje?

c Je rekenmachine kan het aantal graankorrels op het 64ste vakje niet uitrekenen, alleen benaderen. Hoeveel graankorrels worden het ongeveer?

Neem aan dat een graankorrel ongeveer 65 mg weegt.

d Hoeveel gewicht zou er dan op het 64ste vakje rusten als alle graankorrels er op zouden kunnen liggen?

Neem aan dat een vakje van het schaakbord 5 bij 5 cm is en dat in elke cm^3 zo'n 100 graankorrels kunnen worden geperst. De hoeveelheid graan op het 64ste vakje past dan in een balkvormige toren met een grondvlak van 5 bij 5 cm.

e Hoe hoog zou die toren moeten worden?

Opgave 15: Machten optellen

Bekijk nog eens het verhaal dat wordt beschreven in **Toepassen**.
Je ziet in de figuur hoeveel vakjes een schaakbord heeft.

a Hoeveel graankorrels moet de koning op de eerste tien vakjes samen leggen?

b Laat zien dat het antwoord op de vorige vraag gelijk is aan $2^{10} - 1$.

De totale hoeveelheid graankorrels die op het schaakbord zouden moeten komen is $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{62} + 2^{63}$. Dit is gelijk aan $2^{64} - 1$.

c Dat kun je zelf beredeneren. Probeer die redenering te vinden.

Testen

Opgave 16

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen door de haakjes weg te werken en breuken samen te nemen.

a $\left(3p^2\right)^3 - 4p\left(p^4 + 3p^5\right)$

b $\left(x^3 - 4\right)^2 - x^3\left(5 + x^3\right)$

c $\frac{4}{a^2-1} - \frac{4}{a^2+1}$

d $3pq\left(p^2 + q^2\right) - (2p)^3 \cdot 4q$

Opgave 17

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

a $15x^5 - 5x^3$

b $x^7 - 17x^6 + 60x^5$

Opgave 18

Eén mol is gelijk aan precies $6{,}02214076 \times 10^{23}$ deeltjes. Dit getal heet het getal van Avogadro.

a Je hebt 5×10^4 mol zuurstof. Hoeveel zuurstofmoleculen heb je dan? (Gebruik de wetenschappelijke notatie in drie decimalen.)

b Je hebt $7{,}25 \times 10^{25}$ waterstofatomen. Hoeveel mol is dat? (Rond af op gehelen.)

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met machten**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.