# 1.3 Haakjes

## Inleiding

Soms komen in uitdrukkingen met variabelen haakjes voor. Dat heeft met de rekenvolgorde te maken. Maar niet altijd zijn die haakjes handig, een uitdrukking is af en toe te vereenvoudigen door de haakjes weg te werken.

Ook kun je sommige uitdrukkingen zonder haakjes weer van haakjes voorzien. Dat heet “ontbinden in factoren”.


**Figuur 1**

### Je leert in dit onderwerp

- in uitdrukkingen met variabelen termen en factoren onderscheiden;
- uitdrukkingen met variabelen waarin haakjes voorkomen vereenvoudigen door haakjes weg te werken;
- ontbinden in factoren door een gemeenschappelijke factor buiten haakjes te halen en/of met behulp van de som-product-methode.

### Voorkennis

- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden;
- breuken met variabelen herleiden.

## Verkennen

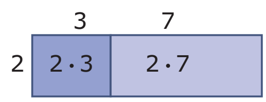
### Opgave V1

Bekijk de figuur hiernaast.

**a** Leg uit dat deze figuur laat zien dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$.

**b** Teken zelf een figuur die laat zien dat $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.

**c** Reken ook nog even na, dat $2 \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7$ en $2 \cdot (7 - 3) = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 3$.




**Figuur 2**

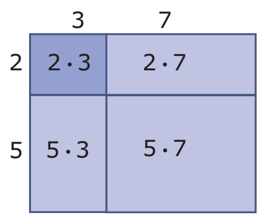
### Opgave V2

Bekijk de figuur hiernaast.

**a** Leg uit dat deze figuur laat zien dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$.

**b** Teken zelf een figuur die laat zien dat $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

**c** Reken ook nog even na, dat $(2 + 5) \cdot (3 + 7) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 7$ en $(5 - 2) \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3$.

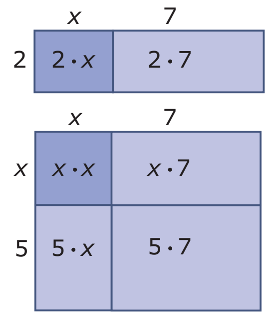



**Figuur 3**

## Uitleg

De figuren hiernaast laten zien dat

- $2 \cdot (x + 7) = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2x + 14$
  Het product van de factoren 2 en $x + 7$ herleid je zo tot de 'tweeterm' $2x + 14$.
- $(x + 5) \cdot (x + 7) = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = x^2 + 12x + 35$
  Het product van de factoren $x + 5$ en $x + 7$ herleid je zo tot de 'drieterm' $x^2 + 12x + 35$.



**Figuur 4**

Een product bestaat uit 'factoren' en een optelling (of aftrekking) uit 'termen'. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor 2 wordt verdeeld over de twee termen van de factor $x + 7$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.

Dit is de 'verdeeleigenschap' of ook wel 'distributieve eigenschap' van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel 'haakjes uitwerken'. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $2x + 14 = 2 \cdot x + 2 \cdot 7 = 2 \cdot (x + 7)$
- $x^2 + 12x + 35 = x \cdot x + 7 \cdot x + 5 \cdot x + 5 \cdot 7 = (x + 7) \cdot (x + 5)$

Dit heet 'ontbinden in factoren' omdat je nu van een tweeterm of een drieterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de 'grootste gemeenschappelijke deler' (GGD) van beide termen. Je kunt dan die GGD 'buiten haakjes halen'. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan.

## Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je haakjes kunt uitwerken.

**a** Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $4(2x + 3) = 8x + 12$.

**b** Maak zelf een rechthoek waarmee je laat zien dat $(2x + 3)(x + 4) = 2x^2 + 11x + 12$.

**c** Werk van $x(2x + 3)$ de haakjes uit.

Je kunt van $x(2x - 3)$ de haakjes uitwerken door de uitdrukking te schrijven als $x(2x - 3) = x(2x + \text{-}3)$.

**d** Wat krijg je dan als je het antwoord zo ver mogelijk herleidt?

**e** Werk van $(x + 5)(2x - 3)$ de haakjes uit.

**f** Laat met behulp van de verdeeleigenschap zien, dat $\text{-}(x - 3) = \text{-}x + 3$.

## Opgave 2

Werk de haakjes uit en herleid zover mogelijk:

**a** $5(a + 2b)$

**b** $5a(a - 2b)$

**c** $(x + 4)(x + 5)$

**d** $(2x - 4)(x - 5)$

**e** $3(2p + 4) + 5(4 - p)$

**f** $3(2p + 4) - (4 - p)$

## Opgave 3

Het omgekeerde van haakjes uitwerken is ontbinden in factoren. Daarbij maak je van een tweeterm of een drieterm (of een uitdrukking met nog meer termen) een product van factoren. Eerst ga je op zoek naar de gemeenschappelijke delers van alle termen.

**a** Bekijk de uitdrukking $6x + 9$. Welke GGD hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

**b** Bekijk de uitdrukking $8x - 6x^2$. Welke GGD hebben beide termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

**c** Bekijk de uitdrukking $2x^2 - 6x + 12$. Welke GGD hebben alle drie de termen? Hoe wordt dus de ontbinding in factoren?

**d** Bekijk de uitdrukking $x^2 + 5x + 6$. Is er een GGD van alle drie de termen? Laat zien dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

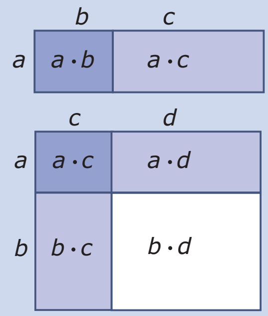
# Theorie en voorbeelden

## Om te onthouden

De figuren hiernaast laten zien dat

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  Het product van de factoren $a$ en $b + c$ herleid je zo tot de **tweeterm** $ab + ac$.
- $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$
  Het product van de factoren $a + b$ en $c + d$ herleid je zo tot de **vierterm** $ac + ad + bc + cd$.

Een product bestaat uit **factoren** en een optelling (of aftrekking) uit **termen**. En je ziet in de bovenste figuur dat de factor $a$ wordt verdeeld over de twee termen van de factor $b + c$. In de onderste figuur gebeurt iets dergelijks.



**Figuur 5**

Dit is de **verdeeleigenschap** of ook wel **distributieve eigenschap** van getallen en daarom ook van variabelen. Je noemt dit wel **haakjes uitwerken**. Deze eigenschap gaat op voor alle getallen, ook negatieve.

Je kunt ook in de omgekeerde richting werken:

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)$

Dit heet **ontbinden in factoren** omdat je nu van een tweeterm of een vierterm weer een product van twee factoren maakt. Bij de eerste van deze twee ontbindingen zoek je de **grootste gemeenschappelijke deler** (GGD) van beide termen. Je kunt dan die GGD **buiten haakjes halen**. Maar bij de tweede ontbinding kun je beter anders te werk gaan, je gebruikt dan de **som-en-productmethode**, zie **Voorbeeld 3**.

## Voorbeeld 1

Hier zie je nog enkele voorbeelden van haakjes wegwerken.

- $3(5 + 2x) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2x = 15 + 6x$
- $\text{-}2k(k - 4) = \text{-}2k(k + \text{-}4) = \text{-}2k \cdot k + \text{-}2k \cdot \text{-}4 = \text{-}2k^2 + 8k$
- $(p + 3)(p - 4) = (p + 3) \cdot (p + \text{-}4) = p \cdot p + \text{-}4 \cdot p + 3 \cdot p + 3 \cdot \text{-}4 = p^2 - p - 12$
- $2(x + 1)(x - 1) = 2\left(x^2 - x + x - 1\right) = 2\left(x^2 - 1\right) = 2x^2 - 2$
- $2(q + 1) - 2(2 - q) = 2q + 2 - 4 + 2q = 4q - 2$
- $q(q + 1) - (q - 1) = q^2 + q - q + 1 = q^2 + 1$

## Opgave 4

Werk van de volgende uitdrukkingen de haakjes weg en herleid ze zo ver mogelijk.

**a** $2x + 3(4 - x)$

**b** $(2k + 3)(k + 4)$

**c** $4x(x - y + 5)$

**d** $3(2x - 1)(4 - x)$

**e** $2\left(x^2 - 3x\right) - x(2 - x)$

**f** $(6 - p) \cdot \text{-}p + 2(p - 3)$

### Opgave 5

Bij het wegwerken van haakjes kom je een paar bijzondere gevallen tegen. Dat zijn de merkwaardige producten: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ en $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

**a** Laat zien, dat $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

**b** Laat zien, dat: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Je kunt hiermee in sommige gevallen de haakjes sneller wegwerken. Pas dit bij het herleiden van de volgende uitdrukkingen toe.

**c** $(k-5)(k+5)$

**d** $(x+10)^2$

**e** $(3p+1)(1-3p)$

**f** $(2x-3)^2$

**g** $(a+2)^2-(a-2)^2$

**h** $x(5x-4)-(x-2)(x+2)$

### Opgave 6

Oefen het wegwerken van haakjes via het **Practicum**.

### Opgave 7

Ook bij het werken met breuken kun je met haakjes te maken krijgen. Je wilt bijvoorbeeld van $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}$ één breuk maken.

**a** Wat is het KGV van $x$ en $x+1$?

**b** Maak nu beide breuken gelijknamig en tel ze op.

**c** Schrijf de breuk zonder haakjes.

### Voorbeeld 2

Een uitdrukking zonder haakjes kun je soms ontbinden in factoren door de GGD van alle termen buiten haakjes te halen. Hier zie je er enkele voorbeelden van.

- $5x+10=5\cdot x+5\cdot 2=5(x+2)$
- $-5x+10=-5\cdot x--5\cdot 2=-5(x-2)$
  of
  $-5x+10=5\cdot -x+5\cdot 2=5(-x+2)$
- $-5x^2-10x=-5x\cdot x+-5x\cdot 2=-5x(x+2)$
- $5x^2-10x+15=5\cdot x^2+5\cdot 2x+5\cdot 3=5\left(x^2+2x+3\right)$
- $5x^2-10xy=5x\cdot x+5x\cdot 2y=5x(x+2y)$
- $5xy-5y=5y\cdot x-5y\cdot 1=5y(x-1)$

### Opgave 8

Je ziet in **Voorbeeld 2** hoe je kunt ontbinden in factoren door een zo groot mogelijke gemeenschappelijke deler buiten haakjes te halen.

**a** Bij de tweede uitdrukking zie je hoe er op twee manieren kan worden ontbonden in factoren. Is dat vaker het geval?

**b** Hoe kun je controleren of je ontbinding goed is?

### Opgave 9

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

**a** $6x+8y$

**b** $14k^2-21k$

**c** $-4xy-12y^2+6y$

**d** $p^2-p$

**e** $3a^2 + 16ab$

**f** $-12x^2 - 6x + 18$

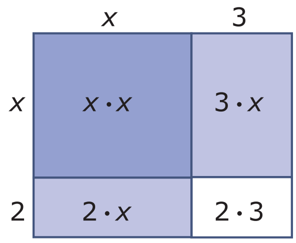
## Opgave 10

Oefen het buiten haakjes halen via het **Practicum**.

### Voorbeeld 3

De uitdrukking $x^2+5x+6$ kun je niet ontbinden in factoren door een GGD buiten haakjes te halen, er is namelijk geen GGD (behalve 1).

In de figuur hiernaast zie je dat $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.
Maar hoe kom je nu aan die 2 en die 3?
Je ziet in de figuur dat de term $5x$ ontstaat door de oppervlaktes $2x$ en $3x$ op te tellen en dat de term 6 de oppervlakte van het rechthoekje van 2 bij 3 is. Kortom: het getal in de term met $x$ is de som van 2 en 3 en het getal in de term zonder $x$ is het product van 2 en 3.




**Figuur 6**

Wil je een uitdrukking zoals $x^2 + 5x + 6$ ontbinden dan zoek je dus twee getallen die opgeteld 5 en vermenigvuldigd 6 opleveren. In dit geval zijn dat de getallen 2 en 3. Maar in het algemeen zijn dergelijke getallen alleen te vinden als je er van uitgaat dat je uitsluitend gehele getallen wilt hebben. Je kunt dan systematisch alle mogelijkheden voor de vermenigvuldiging nagaan. Je gebruikt de zogenaamde 'som-en-productmethode'.

## Opgave 11

Neem **Voorbeeld 3** eerst door. Bekijk nu de uitdrukking $x^2 + 6x + 8$. Je wilt deze uitdrukking ontbinden.

**a** Waarom kun je deze uitdrukking niet ontbinden door iets buiten haakjes te halen?

**b** Volgens de som-en-productmethode kun je deze uitdrukking ontbinden door twee getallen te zoeken die opgeteld 6 en vermenigvuldigd 8 opleveren. Welke getallen voldoen daar aan?

**c** Schrijf de juiste ontbinding op.

**d** Controleer je ontbinding door de haakjes weer uit te werken.

## Opgave 12

Ontbind de volgende uitdrukkingen met de som-en-productmethode.

**a** $x^2 + 7x + 12$

**b** $x^2 + 12x + 20$

**c** $x^2 + 13x + 12$

**d** $x^2 + 2x + 1$

**e** $x^2 + 19x + 90$

**f** $x^2 + 18x + 81$

## Opgave 13

Het ontbinden in factoren wordt wat lastiger als je ook mintekens hebt en de twee manieren van ontbinden door elkaar gaat gebruiken of zelfs beide moet gebruiken bij dezelfde uitdrukking. Dan wordt een systematische aanpak belangrijk.

**a** Laat zien, dat $x^2+5x-6 = (x + 6)(x - 1)$. Leg ook uit hoe je dit in de tabel hiernaast kunt zien.

**b** Ontbind zelf $x^2 - 5x - 6$

**c** Ontbind ook $x^2 - x - 6$

| product | getallen | som |
|---|---|---|
| -6 | -6 en 1 | -5 |
| -6 | 6 en -1 | 5 |
| -6 | -3 en 2 | -1 |
| -6 | 3 en -2 | 1 |

**Tabel 1**

Je ziet dat bij ontbinden met de som-en-productmethode een tabel van alle mogelijke gehele getallen die het juiste product opleveren handig is.

**d** Waarom doe je dit voor het product en niet voor de som van beide getallen?

**e** Ontbind $x^2 - 2x - 8$

De som-en-productmethode is alleen geschikt voor vormen zoals $x^2 + px + q$. Zo'n vorm herleid je dan tot $(x + a)(x + b)$.

**f** Druk $p$ en $q$ uit in $a$ en $b$.

**g** Laat zien, dat $p$ en $q$ ook 0 kunnen zijn. Geef van beide situaties een voorbeeld.

### Opgave 14

Ontbind de volgende uitdrukkingen. Kijk eerst of je iets buiten haakjes kunt halen en gebruik pas als dat niet (meer) kan de som-en-productmethode.

**a** $x^2 - 7x + 12$

**b** $x^2 + 2x - 48$

**c** $x^2 - 9$

**d** $x^2 - 9x$

**e** $2x^2 + 16x + 24$

**f** $3x^2 - 48$

## Verwerken

### Opgave 15

Werk de haakjes weg en herleid zover mogelijk.

**a** $2x(x + 5)$

**b** $2x - (x + 5)$

**c** $(2x - 1)(x + 5)$

**d** $3(2x - 1) - 4(x + 5)$

**e** $(x + 5)^2$

**f** $(2x - 1)^2 - (x - 5)(x + 5)$

**g** $(2x + y)(y + 5) + 2x(5 - y)$

**h** $(2x + y)^2 - (y + 5)^2$

### Opgave 16

Breng een zo groot mogelijke factor buiten haakjes.

**a** $14x + 21y$

**b** $3p^2 - 6pq$

**c** $-4a^2b - 4ab$

**d** $p^3 - 3p^2 - p$

### Opgave 17

Ontbind in factoren met behulp van de som-en-productmethode.

**a** $x^2 + 17x + 30$

**b** $x^2 - x - 12$

**c** $16 - 10x + x^2$

**d** $k^2 - 100$

### Opgave 18

Ontbind in factoren.

**a** $12a^2 - 8a$

**b** $6p - 16 + p^2$

**c** $\frac{1}{2}k^2 - 8$

**d** $3x^2 - 6x - 9$

**e** $-4pq + 8pq^2$

**f** $8x - 16 - x^2$

### Opgave 19

Oefen het ontbinden in factoren via het **Practicum**.

### Opgave 20

Schrijf als één breuk en zonder haakjes.

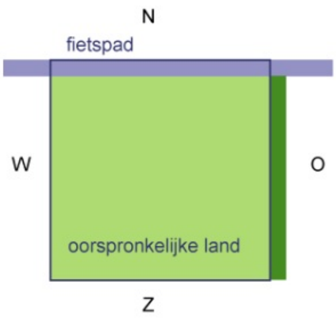
**a** $\frac{2}{a-2} + \frac{3}{a}$

**b** $\frac{3}{a-2} + \frac{2}{a+2}$

## Toepassen

Een boer heeft een vierkant stuk land. De gemeente wil langs de noordrand een fietspad van 3 m breed aanleggen. Ze wil daarom een strook van die breedte aankopen. In plaats van het stuk land dat hij kwijtraakt mag de boer aan de oostkant zijn land uitbreiden met een strook van dezelfde breedte.

Heeft de boer nu een even groot stuk land als voorheen?




Figuur 7

### Opgave 21: Fietspad aanleggen

Bekijk het probleem dat wordt beschreven in **Toepassen**.
De afmetingen van het oorspronkelijke vierkante stuk land zijn onbekend. Je kunt daarom voor de lengte en de breedte de variabele $x$ kiezen.

**a** Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van het oorspronkelijke stuk land?

Nu gaat er aan de noordkant een strook van 3 m af, die er aan de oostkant weer bij komt. Het landje wordt nu rechthoekig.

**b** Welke lengte en welke breedte krijgt het stuk land na aanleg van het fietspad?

**c** Bereken de oppervlakte van het stuk land na aanleg van het fietspad. Schrijf je antwoord zonder haakjes en zo eenvoudig mogelijk.

**d** Welke conclusie trek je?

## Testen

### Opgave 22

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen door de haakjes weg te werken.

**a** $4a(a-5b)+2a(a+3b)$

**b** $4a-(a-5b)$

**c** $(a+2b)(2a-b)$

**d** $(a+1)^2-(a+1)(a-1)$

### Opgave 23

Ontbind de volgende uitdrukkingen in factoren.

**a** $2x^2-6x$

**b** $x^2-17x+60$

**c** $2x^3-10x^2+12x$

**d** $32-2x^4$

## Practicum: Werken met haakjes

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het uitwerken van haakjes** en met **het ontbinden in factoren**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

**Werk met AlgebraKIT.**

**Werk met AlgebraKIT.**

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.