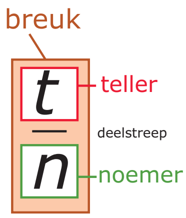
1.2 Breuken

Inleiding

Je kunt al met breuken rekenen.
Maar nu ga je dit doen als er ook variabelen in de teller of de noemer van de breuk voorkomen. Dat gaat op dezelfde manier als gewoon met getallen, maar toch...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met breuken waarin variabelen voorkomen;
- breuken (met variabelen) vereenvoudigen en gelijknamig maken;
- breuken (met variabelen) optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Voorkennis

- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen, met name rekenen met breuken;
- het begrip variabele en berekeningen met variabelen uitvoeren, uitdrukkingen herleiden.

Verkennen

Opgave V1

Je kunt al rekenen met de breuken. Neem bijvoorbeeld $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{5}{6} - \frac{3}{4}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken het quotiënt van beide breuken, deel de grootste door de kleinste.

Opgave V2

Je kunt op dezelfde manier rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen. Werk met de breuken $\frac{5}{a}$ en $\frac{3}{b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som van beide breuken.

b Bereken $\frac{5}{a} - \frac{3}{b}$, het verschil van deze breuken.

c Hoeveel is het product van beide breuken?

d Bereken $\frac{5}{a} \Big/ \frac{3}{b}$.

e Waarom moet je aannemen dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$?

Uitleg

Bij het rekenen met breuken is het 'gelijknamig maken' van twee (of meer) breuken een belangrijke vaardigheid. Daarmee zorg je er voor dat de noemers gelijk worden, zodat het gelijksoortige breuken worden. Je zoekt daartoe het kleinste getal dat van beide noemers een veelvoud is. Dit heet het 'kleinste gemeenschappelijke veelvoud' of kortweg 'KGV' van beide noemers.

- Als je $\frac{2}{5}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van 5 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 20 en de breuken worden $\frac{8}{20}$ en $\frac{15}{20}$.
- Als je $\frac{5}{6}$ en $\frac{3}{4}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van 6 en 4. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is 12 en de breuken worden $\frac{10}{12}$ en $\frac{9}{12}$.

- Als je $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van b en d. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is bd en de breuken worden $\frac{ad}{bd}$ en $\frac{bc}{bd}$.
- Als je $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{2a}$ gelijknamig wilt maken, dan zoek je het KGV van a en $2a$. Het kleinste veelvoud van deze beide getallen is $2a$ en de breuken worden $\frac{4}{2a}$ en $\frac{3}{2a}$.

En nu kun je deze breuken optellen, aftrekken en delen. Bij het vermenigvuldigen van breuken is gelijknamig maken niet nodig, je vermenigvuldigt de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.

Soms kun je breuken ‘vereenvoudigen’ door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bijvoorbeeld:

- $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ (teller en noemer delen door 12).
- $\frac{4a}{6a^2} = \frac{2}{3a}$ (teller en noemer delen door $2a$).

Belangrijk is nog dat bij breuken de noemer niet 0 kan zijn, want delen door 0 heeft geen betekenis. Daar moet je voortdurend van uit gaan.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je breuken gelijknamig maakt om ze te kunnen optellen, aftrekken en delen. Neem de breuken $\frac{2}{a}$ en $\frac{3}{b}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$, $\frac{2}{a} - \frac{3}{b}$ en $\frac{2}{a} \Big/ \frac{3}{b}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 2

Neem de breuken $\frac{2}{3a}$ en $\frac{3}{5a}$.

a Maak beide breuken gelijknamig.

b Bereken nu $\frac{2}{3a} + \frac{3}{5a}$, $\frac{2}{3a} - \frac{3}{5a}$ en $\frac{2}{3a} \Big/ \frac{3}{5a}$.

c Vermenigvuldig beide breuken met elkaar.

Opgave 3

Neem de breuken $\frac{4p}{2pr}$ en $\frac{5}{3q}$.

a Welke van beide breuken kun je nog vereenvoudigen? Doe dat eerst.

b Tel beide breuken op.

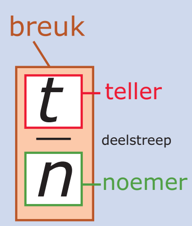
c Vermenigvuldig beide breuken.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je kunt al **rekenen met breuken**: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Het rekenen met breuken waarin variabelen voorkomen gaat net zo.

- Bij optellen en aftrekken maak je de breuken eerst **gelijknamig**:
  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad+bc}{bd}$ en $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad-bc}{bd}$
- Bij vermenigvuldigen moet je tellers en noemers afzonderlijk vermenigvuldigen:
  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$
- Bij delen maak je de breuken eerst gelijknamig:
  $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \Big/ \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad}{bc}$ (beide breuken met $b \cdot d$ vermenigvuldigen)



Figuur 2

Er is één maar: door 0 delen heeft geen betekenis. In de berekeningen hierboven moet daarom steeds $b \neq 0$ en $d \neq 0$ en bij de deling moet ook $c \neq 0$.

Kijk goed of je de breuken waarmee je werkt nog kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Bij het gelijknamig maken zoek je het **kleinste gemeenschappelijke veelvoud** of kortweg **KGV** van de noemers van de breuken.

Voorbeeld 1

Gegeven de twee breuken $\frac{2}{p}$ en $\frac{3}{2q}$ (met $p \neq 0$ en $q \neq 0$). Tel beide breuken op, vermenigvuldig ze en deel de eerste door de tweede.

Antwoord

- Optellen: $\frac{2}{p} + \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 2q}{p \cdot 2q} + \frac{3 \cdot p}{2q \cdot p} = \frac{4q}{2pq} + \frac{3p}{2pq} = \frac{4q+3p}{2pq}$
- Vermenigvuldigen: $\frac{2}{p} \cdot \frac{3}{2q} = \frac{2 \cdot 3}{p \cdot 2q} = \frac{6}{2pq} = \frac{3}{pq}$
- Delen: $\frac{2}{p} \Big/ \frac{3}{2q} = \frac{4q}{2pq} \Big/ \frac{3p}{2pq} = \frac{4q}{3p}$

Opgave 4

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{3}{2p}$ en $\frac{5}{q}$ met $p \neq 0$ en $q \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Deel $\frac{3}{2p}$ door $\frac{5}{q}$.

Gegeven zijn de twee breuken $\frac{2}{3}p$ en $\frac{1}{2p}$ met $p \neq 0$.

c Bereken de som en het product van beide breuken.

d Deel $\frac{2}{3}p$ door $\frac{1}{2p}$.

Opgave 5

Bekijk altijd vooraf of je de breuken niet beter eerst kunt vereenvoudigen door teller en noemer door hetzelfde te delen. Misschien hoef je wel niet eens met breuken te rekenen. Zo is $\frac{12a^2b}{3ab} = 4a$.
Herleid de volgende uitdrukkingen (neem aan dat alle variabelen ongelijk 0 zijn):

a $\frac{2p}{4pq} + \frac{6}{3q}$

b $\frac{-3b}{ab} \Big/ \frac{2a}{a^2}$

c $\frac{2pq}{q} - \frac{15p}{3}$

d $\frac{4pq}{2p} \cdot \frac{6p}{3}$

Opgave 6

Oefen het rekenen met breuken met variabelen via het **Practicum**.

Voorbeeld 2

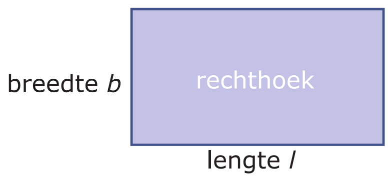
Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 21,4 cm. Je wilt de lengte en de breedte bepalen.

Antwoord

Dergelijke problemen met twee variabelen kun je oplossen met behulp van grafieken.

Je neemt voor de lengte bijvoorbeeld l en voor de breedte b.
De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 21{,}4$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.



Figuur 3

Deze formules kun je met behulp van de balansmethode herleiden tot de vorm $l = ...$:

- Uit de formule voor de omtrek volgt $l = 10{,}7 - b$.
- Uit de formule voor de oppervlakte volgt $l = \frac{24}{b}$.

Je zegt wel dat l nu is **uitgedrukt in** b. Dat doe je om gemakkelijker tabellen en grafieken te kunnen maken. Probeer daarmee de juiste waarden voor lengte en breedte te vinden.

Opgave 7

Bekijk het probleem in **Voorbeeld 2**.

a Ga zelf na, dat dit probleem kan worden vertaald in de formules $2l+2b=21{,}4$ en $l \cdot b = 24$.

b Laat zien, hoe je de formule $2l+2b=21{,}4$ kunt herleiden tot een vorm waarin l is uitgedrukt in b.

c Hoe kun je de formule $l \cdot b = 24$ herleiden tot l is uitgedrukt in b? Welke waarde kan b dan niet meer hebben?

Je hebt nu twee formules gekregen waarbij je grafieken kunt maken.

d Van welke variabele komen de waarden op de horizontale as? En waarom?

e Maak bij beide formules een tabel en teken de bijbehorende grafieken in één figuur. Los het probleem op met behulp van inklemmen.

Opgave 8

Herleid de volgende formules tot een vorm waarin y is uitgedrukt in x. Neem aan dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$.

a $3x+2y=8$

b $3x-2xy=8$

c $x \cdot 3y = 9$

d $\frac{x}{3y}=9$

Opgave 9

Van een ruit is de oppervlakte 15 cm^2. Deze ruit past precies in een rechthoek waarvan de zijden evenwijdig zijn met de diagonalen van de ruit en die een omtrek heeft van 23 cm. Hoe lang zijn de diagonalen van deze ruit?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord met behulp van grafieken.

Verwerken

Opgave 10

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{a}{3b}$. Neem aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$.

a Bereken de som en het product van beide breuken.

b Bereken ook $\frac{2a}{b} - \frac{a}{3b}$ en $\frac{2a}{b} \Big/ \frac{a}{3b}$

Reken met de twee breuken $\frac{2a}{b}$ en $\frac{b}{3a}$.

c Bereken de som en het product van beide breuken.

Opgave 11

Herleid tot een vorm met niet meer dan één breuk:

a $\frac{1}{2a}+\frac{3}{b}$

b $\frac{15ab}{3a}-\frac{12b^2}{4b}$

c $\frac{b}{4a}\cdot\frac{2a^2}{3b}$

d $\frac{1}{a}-\frac{2}{b}$

e $\frac{6}{a} \Big/ \frac{1}{2a}$

f $\frac{1}{a}+\frac{a}{2}$

Opgave 12

Bereken als $p = 3$ en $q = -4$.

a $\frac{6p}{pq} \cdot \frac{5q}{3p}$

b $\frac{4}{3q} - \frac{1}{q}$

c $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$

d $\frac{2p}{pq} \Big/ \frac{6}{q}$

Opgave 13

Herleid de volgende formules tot ze een vorm hebben waarin a is uitgedrukt in b.

a $a \cdot 3b = 6$

b $3a + b = 6$

c $\frac{3a}{2b^2} = \frac{1}{b}$

d $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 2$

Opgave 14

Twee getallen verschillen 14. Als je het grootste getal door het kleinste deelt, dan krijg je 5. Welke getallen zijn dat?

Stel bij dit probleem formules op en bereken het antwoord.

Toepassen

In sommige gevallen heb je met bijzondere gemiddelden te maken. Naast het ‘gewogen gemiddelde’ (waarin niet alle getallen even zwaar meetellen, maar meetellen volgens een bepaald gewicht), heb je het **harmonisch gemiddelde**. Een voorbeeld daarvan heb je misschien al eerder gezien.

Je vliegt heen en weer van Amsterdam naar Moskou. Op de heenreis is je gemiddelde snelheid 900 km/uur, op de terugreis is je gemiddelde vliegsnelheid 960 km/uur vanwege de weersomstandigheden. In beide gevallen is de gevlogen afstand hetzelfde.
Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Die gemiddelde snelheid is een harmonisch gemiddelde...

Opgave 15: Harmonisch gemiddelde

Bekijk het probleem dat wordt beschreven in **Toepassen**.

a Hoeveel bedraagt je gemiddelde snelheid over de gehele vlucht?

Uit de **Wikipedia: Harmonisch gemiddelde**: “De gemiddelde snelheid van twee ritten over dezelfde afstand, gereden met verschillende maar constante snelheid, is het harmonisch gemiddelde van de beide snelheden. Als de heenreis wordt gereden met 100 km/uur en de terugreis met 120 km/uur, is de gemiddelde snelheid van de totale rit het harmonisch gemiddelde van de twee snelheden, 109 km/uur. Als in plaats van de lengte, de tijdsduur van de ritten gelijk is, dient men het rekenkundig gemiddelde te gebruiken.”

b Laat zien dat deze uitspraak correct is.

Testen

Opgave 16

Herleid deze uitdrukkingen eerst tot een vorm met één breuk en bereken ze daarna als $a = 5$ en $b = -2$.

a $\frac{2}{a} + \frac{3}{b}$

b $\frac{14a}{2ab} - \frac{6a^2}{3ab}$

c $\frac{4a}{5b} \cdot \frac{15ab}{3b}$

d $\frac{4a}{5b} \Big/ \frac{3ab}{15b}$

Opgave 17

Herleid deze uitdrukkingen tot y is uitgedrukt in x.

a $2x \cdot 3y = 12$

b $\frac{2}{x} = \frac{7}{2x} - \frac{1}{y}$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het herleiden van uitdrukkingen met breuken**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.