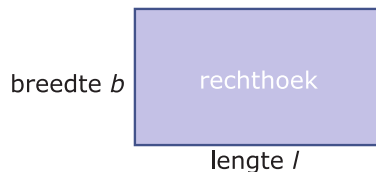


1.1 Rekenen met variabelen

Inleiding

Weet je nog wat variabelen zijn?

Hoe zou je ze gebruiken als je van een rechthoek met een oppervlakte van 24 cm^2 en een omtrek van 22 cm de zijden wilt bepalen?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat variabelen zijn en hoe je ermee rekt, dus wat algebra is;
- de wisseleigenschap van optellen en vermenigvuldigen gebruiken en uitdrukkingen met variabelen herleiden door gelijksoortige termen samen te nemen;
- voor variabelen getallen invullen en de uitdrukking berekenen.

Voorkennis

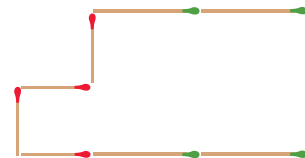
- getallen gebruiken om te tellen en te rekenen;
- het begrip variabele en eenvoudige berekeningen met variabelen uitvoeren.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk deze luciferfiguur. Hij is gemaakt van rode lucifers met een lengte van $a \text{ cm}$ en groene lucifers met een lengte van $b \text{ cm}$.

- Hoeveel bedraagt de omtrek van deze figuur?
- Hoeveel bedraagt de oppervlakte van het gebied binnen de figuur?
- Neem nu aan dat $a = 3 \text{ cm}$ en $b = 5 \text{ cm}$. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van de figuur?
- Neem nu aan dat $a = 3 \text{ cm}$ en $b = 5 \text{ cm}$. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van de figuur?



Figuur 2

Opgave V2

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm .

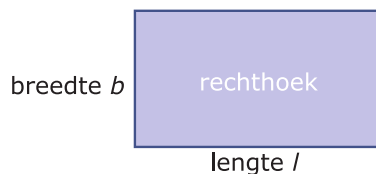
Hoe groot zijn de lengte en de breedte van die rechthoek?

Uitleg

Van een rechthoek zijn lengte en breedte onbekend, je kunt er dus nog verschillende getallen voor kiezen. De lengte en de breedte zijn variabel, veranderlijk. Je noemt de lengte en de breedte daarom 'variabelen'. Variabelen stel je in de wiskunde voor door letters, meestal kleine letters en cursief gedrukt. De lengte kun je hier l noemen en de breedte b . Voor deze rechthoek geldt dan:

- De omtrek is $l + b + l + b = 2 \cdot l + 2 \cdot b = 2l + 2b$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = lb$.

Hierbij is gebruik gemaakt van de afspraak dat je het maalteken \cdot weglaat als daardoor geen misverstanden kunnen ontstaan. Bijvoorbeeld $2 \cdot a = 2a$ en $a \cdot b = ab$, maar $2 \cdot 3 \neq 23$.



Figuur 3

Verder gebruik je bij het rekenen met variabelen dezelfde regels als bij het rekenen met getallen.

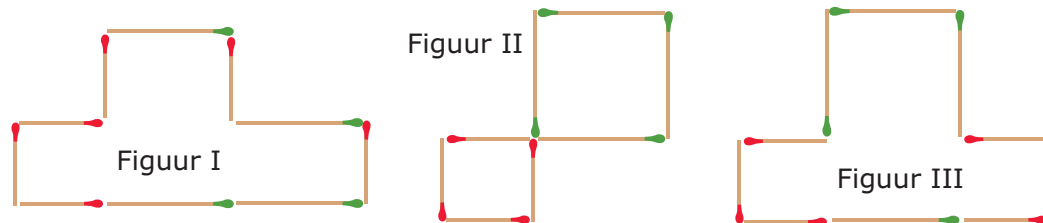
- Je weet $3 + 3 = 2 \cdot 3$. Zo is ook $a + a = 2 \cdot a = 2a$.
- Je weet $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$. Zo is ook $a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
- En dus is $2a + 5a = 7a$. De 'gelijksoortige termen' $2a$ en $5a$ kun je optellen en aftrekken.
- Maar zo kun je $2a + 5b$ niet korter schrijven. De ongelijksoortige termen $2a$ en $5b$ kun je niet optellen of aftrekken.
- Je weet $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ en $2 + 3 = 3 + 2$. Zo is ook $a \cdot b = b \cdot a$ en $a + b = b + a$. (De 'wisseleigenschap' of 'commutatieve eigenschap' voor optellen en vermenigvuldigen.)
- Je weet $3 \cdot 3 = 3^2$. Zo is ook $a \cdot a = a^2$.

Je ziet dat je veel uitdrukkingen met variabelen ook anders kunt schrijven. Je noemt dat 'herschrijven' of 'herleiden' van zo'n uitdrukking. Zo is $2a + 5b + 3a + 4b$ te herleiden tot $5a + 9b$.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** hoe je met variabelen rekt. Let er op dat je gelijksoortige termen zoveel mogelijk samenneemt. Met luciferfiguren kun je het rekenen met variabelen zichtbaar maken.

Je ziet hier drie luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a , de lange hebben lengte b .



Figuur 4

- Bepaal van deze drie luciferfiguren de omtrek. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de omtrek van elke figuur?
- Waarom is het herleiden van de uitdrukkingen met variabelen handig?
- Bepaal van deze drie luciferfiguren de oppervlakte. Schrijf de gevonden uitdrukking zo kort mogelijk.
- Neem nu aan dat $a = 3$ cm en $b = 5$ cm. Hoeveel bedraagt dan de oppervlakte van elke figuur?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je voorbeelden van het rekenen met variabelen.

- Laat zien, dat $2a + 5a = 7a$.
- Laat zien, dat $2a + 5b + 3a + 4b = 5a + 9b$.

Herleid nu zelf:

- $18a + 6b + 10a + 4b$
- $12p + 6q + 10p + 4p$
- $x + 3y + 5y + 8x + 7y$
- $ab + b^2 + 3ab + b^2$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Rekenen is het werken met getallen. Er zijn vier hoofdbewerkingen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Verder ken je de bewerkingen machtsverheffen en worteltrekken.

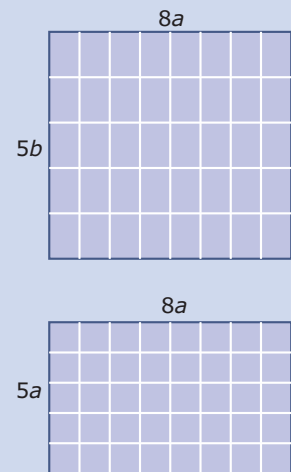
Algebra is het rekenen met **variabelen**. Daarbij gelden dezelfde regels als bij het rekenen. Als er geen misverstanden door ontstaan laat je in de algebra het vermenigvuldigingsteken weg.

Belangrijke situaties zijn:

- $a + a = 2a$ en $a + a + a = 3a$ enzovoort.
- $a \cdot a = a^2$ en $a \cdot a \cdot a = a^3$ enzovoort.
- $a \cdot b = ab$ en $a \cdot a \cdot b = a^2b$ enzovoort.
- **gelijksoortige termen** kun je optellen en aftrekken: $8a + 5a = 13a$ en $8a - 5a = 3a$.
- **ongelijksoortige termen** kun je niet optellen en aftrekken: $8a + 5b$ en $8a - 5b$ kun je niet korter schrijven.
- $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$ en $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$.

Verder maak je regelmatig gebruik van de **wisseleigenschap** van optellen en vermenigvuldigen: $a + b = b + a$ en $a \cdot b = b \cdot a$. Je zegt ook wel dat deze bewerkingen **commutatief** zijn.

In de algebra is het gebruikelijk om uitdrukkingen zo kort en overzichtelijk mogelijk te schrijven door ze te **herleiden** met behulp van bovengenoemde eigenschappen. De variabelen zet je daarbij zoveel mogelijk in alfabetische volgorde. En verder schrijf je $1x$ als x en is $0x = 0$ en zo'n losse nul laat je weg.



Figuur 5

Voorbeeld 1

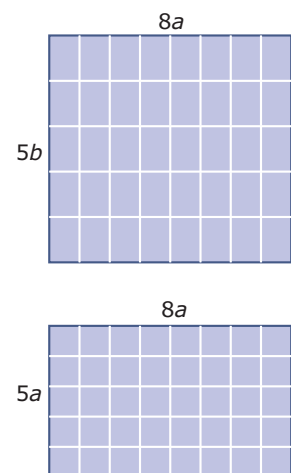
De omtrek van de bovenste rechthoek is $8a + 5b + 8a + 5b = 16a + 10b$.

De omtrek van de onderste rechthoek is $8a + 5a + 8a + 5a = 26a$.

Je ziet hoe gelijksoortige termen worden samengenomen en ongelijksoortige niet.

De oppervlakte van de bovenste rechthoek is $8a \cdot 5b = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 40ab$. Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte ab zijn.

De oppervlakte van de onderste rechthoek is $8a \cdot 5a = 8 \cdot 5 \cdot a \cdot a = 40a^2$. Tel maar na dat er 40 rechthoekjes met oppervlakte a^2 zijn.



Figuur 6

Opgave 3

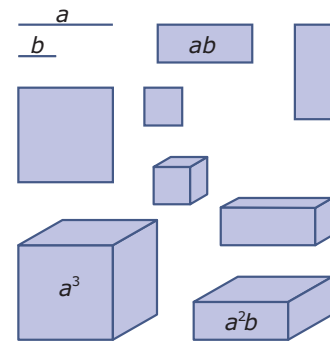
Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je variabelen optelt en vermenigvuldigt. Herleid nu zelf:

- $3a + 12b + 2a + 4b$
- $8p + q + 2p + q$
- $4a \cdot 3b$
- $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2b$
- $4a \cdot 3b + 5a \cdot 2a$
- $6p \cdot 2q + 4q \cdot p$

Opgave 4

In de figuur hiernaast ontbreken nog enkele uitdrukkingen. Hij staat ook op het [werkblad](#).

- Schrijf bij elke figuur de juiste uitdrukking.
- Leg uit waarom ab^2 en a^2b geen gelijksoortige termen zijn.
- Hoe volgt uit de figuur dat $ab = ba$?



Figuur 7

Opgave 5

Herleid:

- $7b + b$
- $2abc + 8abc + bac$
- $12p \cdot 4q + 3qp$
- $3ab^2 + 2a^2b + a^2b + 4ab^2$
- $4x \cdot 3y + 2x \cdot x + y \cdot 2x$
- $2x \cdot x + x + 4x^2 + 5x$

Voorbeeld 2

Bij het herleiden van uitdrukkingen met variabelen kun je ook met negatieve getallen werken en/of termen van elkaar aftrekken. Je ziet hier enkele voorbeelden.

- $9a - 7a = 9a + -7a = 2a$
- $9a \cdot -7a = 9 \cdot -7 \cdot a \cdot a = -63a^2$
- $5a - 6b - a + 5b = 5a + -6b + -1a + 5b = 5a + -1a + -6b + 5b = 4a + -1b = 4a - b$
- $2x \cdot -4y - 6 \cdot -3xy = -8xy - -18xy = -8xy + 18xy = 10xy$

Opgave 6

Bekijk in [Voorbeeld 2](#) hoe je met mintekens werkt bij het herleiden. Herleid nu zelf:

- $-7p - 5p$
- $-7p \cdot -5p$
- $3a - 5b + 2a + 7b$
- $3 + 2x - 5x - 7$
- $4x \cdot 2y - 3y \cdot -7y$
- $3ab - 5a \cdot 2b + ab$

Opgave 7

Met behulp van AlgebraKIT kun je het herleiden van uitdrukkingen oefenen. In het [Practicum](#) kun je dit doen.

Opgave 8

Herleid:

- $6p \cdot 3q - 3p \cdot -4q$
- $-5xy - 3x \cdot -2y$
- $-3 \cdot -2p - 6 \cdot -8p$
- $-3 - 2p - 6 - 8p$
- $4ab \cdot b - a \cdot b \cdot 2b - 3ab \cdot a + 2a \cdot 3b^2$
- $ab \cdot c + 2b \cdot ac - 3abc$

Voorbeeld 3

Van een rechthoek is de oppervlakte 24 cm^2 en de omtrek 22 cm . Je wilt de lengte en de breedte bepalen.

Antwoord

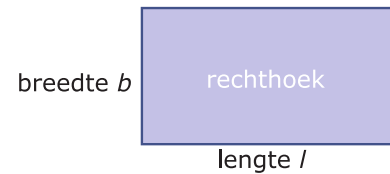
Dergelijke problemen kun je oplossen door gewoon getallen te proberen, zeker als de uitkomsten gehele getallen zijn.

Maar ook dan is het vaak handig om de gegevens eerst te ‘vertalen’ naar wiskundige uitdrukkingen. Zowel de lengte als de breedte zijn hier onbekend. Je kunt er daarom variabelen voor invoeren: noem de lengte bijvoorbeeld l en de breedte b .

De gegevens leveren dan op:

- De omtrek is $2l + 2b = 22$.
- De oppervlakte is $l \cdot b = 24$.

Met behulp van een tabel kun je nu systematisch de oplossing zoeken.



Figuur 8

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** wordt het probleem van **Opgave V2** nog eens bekeken. Om het probleem overzichtelijker te maken worden variabelen ingevoerd.

- De formule die te maken heeft met de omtrek van de rechthoek kun je vereenvoudigen. Laat dat zien.
- Maak een tabel zoals die hiernaast.
- Waarom wordt in de tabel uitgegaan van een vaste oppervlakte en niet van een vast getal voor omtrek?
- Welke twee getallen voldoen aan beide formules?
- In dit geval kwamen zowel de lengte als de breedte op gehele getallen uit. Hoe ga je verder als dit niet het geval is?

l	b	$l \cdot b$	$l + b$
1	24	24	25
2		24	
3		24	
4		24	
6		24	
...		24	

Tabel 1

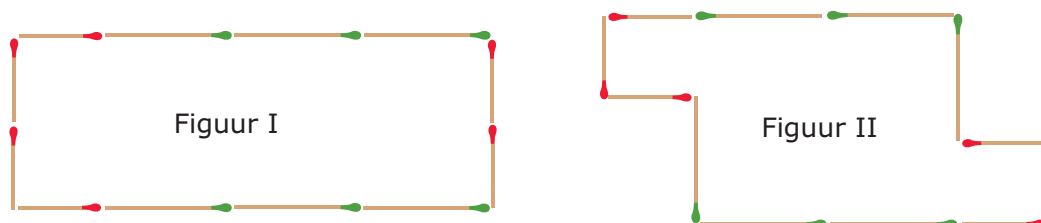
Opgave 10

Van een rechthoek is de omtrek 152 cm en de lengte en de breedte verschillen 32 cm . Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

Verwerken

Opgave 11

Je ziet hier twee luciferfiguren. De korte lucifers hebben lengte a , de lange hebben lengte b .



Figuur 9

- Schrijf van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte op. Herleid alle uitdrukkingen tot zo kort mogelijk zijn.
- Neem aan dat $a = 4$ en $b = 7$. Bereken nu van beide figuren zowel de omtrek als de oppervlakte.

Opgave 12

Herleid:

- a $7x + 20x$
- b $7x \cdot 20x$
- c $7x \cdot 20y$
- d $6x - x$
- e $6x \cdot -10xy$
- f $6x \cdot -20x - 15x \cdot -10x$
- g $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2x$
- h $-x \cdot 5y + 3y \cdot 2y$

Opgave 13

Bereken voor $p = 10$, $q = 5$ en $r = -2$:

- a $4p \cdot -2q + 6q \cdot p$
- b $3p \cdot -5q \cdot r$
- c $5q \cdot 3r \cdot p - 3p \cdot 2q \cdot r$
- d $3p \cdot 2r^2 - 4pr \cdot 8r$
- e $6r^2 + 3p - 3r \cdot 2r$
- f $4pq \cdot 6qr - 3pr \cdot 8q^2$

Opgave 14

Van een rechthoek is de oppervlakte 104 cm^2 en de lengte en de breedte verschillen 5 cm. Bereken de lengte en de breedte van deze rechthoek.

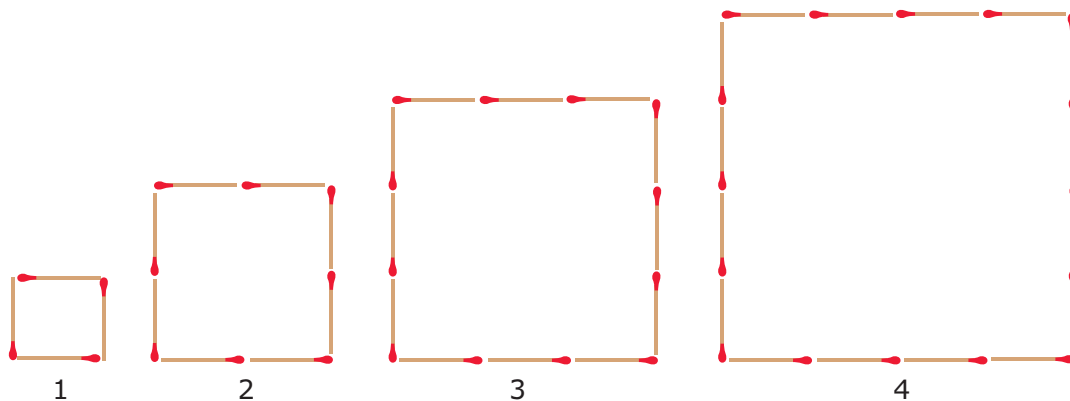
Opgave 15

Kees en Jochum zijn samen 118 jaar oud. Kees is 16 jaar ouder dan Jochum. Bereken hun leeftijden.

Toepassen

Je ziet hier het begin van een serie luciferfiguren waar regelmaat in zit. Die regelmaat kun je beschrijven met een formule voor het aantal lucifers a afhankelijk van het figuurnummer n .

Daarmee kun je vragen beantwoorden als: "Vanaf welk figuurnummer liggen er meer dan 1000 lucifers?"



Figuur 10

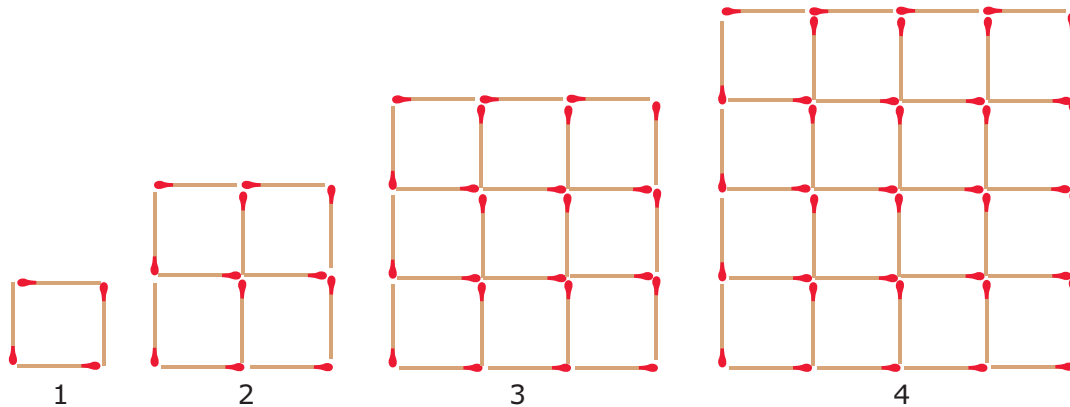
Opgave 16: Luciferpatroon (1)

Bekijk het begin van de serie luciferfiguren hierboven en zet het patroon voort.

- a Hoeveel lucifers bevat figuur nummer 10?
- b Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.
- c Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

Opgave 17: Luciferpatroon (2)

Hier zie je het begin van een ander luciferpatroon.

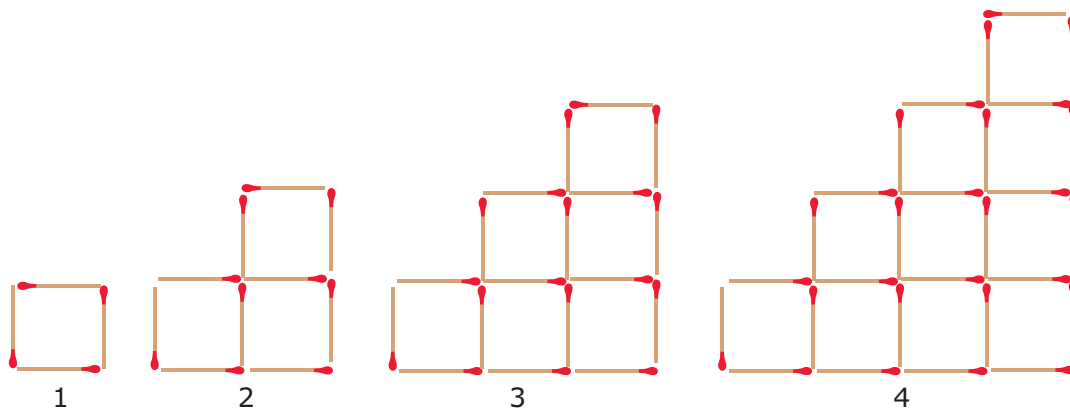


Figuur 11

- a Hoeveel lucifers bevat nu figuurnummer 10?
- b Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.
- c Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

Opgave 18: Luciferpatroon (3)

Hier zie je het begin van weer een ander luciferpatroon.



Figuur 12

- a Hoeveel lucifers bevat nu figuurnummer 10?
- b Stel een formule op voor het aantal lucifers a afhankelijk van het nummer n van de figuur.
- c Vanaf welk figuurnummer heb je meer dan 1000 lucifers nodig om die figuur te leggen?

Testen

Opgave 19

Herleid de volgende uitdrukkingen en bereken ze daarna als $a = 5$ en $b = -2$

- a $2a - 3b + 5a - b$
- b $a - 5a + 4b + 2a$
- c $3a \cdot 2b - 5a \cdot b$
- d $2a \cdot 3ab - 5a \cdot -3a - ab \cdot 2a$

Opgave 20


Van een rechthoekige driehoek is de éne rechthoekszijde 3 cm langer dan de andere. De oppervlakte van deze rechthoekige driehoek is 170 cm^2 . Hoe lang is de hypotenusa (schuine zijde)?

Practicum

Met **AlgebraKIT** kun je oefenen met **het optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van termen**.

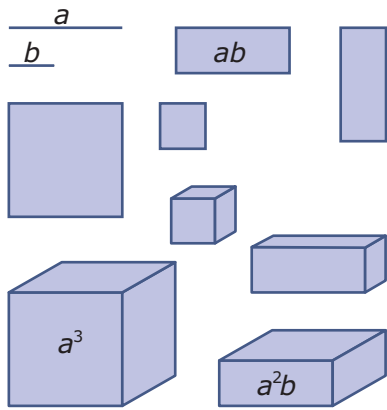
Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.

Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.

Met  krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.


Werkblad bij Opgave 4 op pagina 4.





© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op  in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All Foliostaat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@math4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
