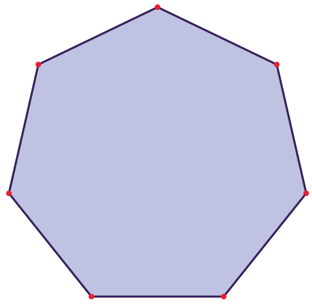
1.4 Vlakke figuren

Inleiding

Dit is een regelmatige zevenhoek. Dat betekent dat alle hoeken gelijk zijn en alle zijden ook.

Als de zijden 2 cm zijn, hoe teken je dan zo'n regelmatige zevenhoek?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip regelmatige veelhoek;
- de hoeken van een regelmatige veelhoek berekenen en regelmatige veelhoeken construeren;
- meetkundige problemen oplossen.

Voorkennis

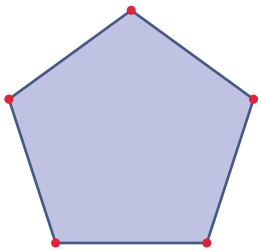
- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen en zijden berekenen met behulp van de vergrotingsfactor;
- de eigenschappen van middelloodlijnen, zwaartelijnen, bissectrices en hoogtelijnen in een driehoek;
- de begrippen ingeschreven en omgeschreven cirkel.

Verkennen

Opgave V1

Hiernaast zie je een regelmatige vijfhoek. In zo’n vijfhoek zijn alle zijden even lang en alle hoeken even groot.

Bereken hoe groot een hoek van een regelmatige vijfhoek is en leg uit hoe je zo'n vijfhoek construeert.

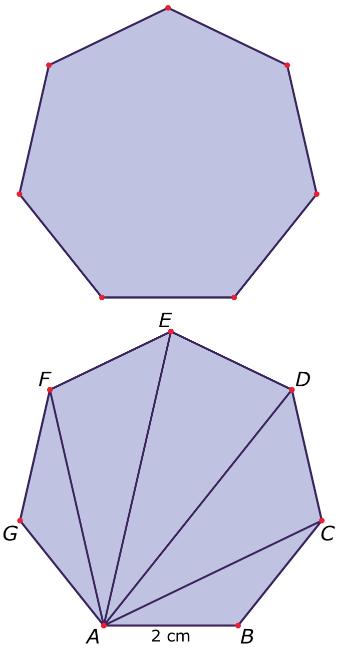


Figuur 2

Uitleg

Je ziet hier een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm. Alle hoeken en alle zijden zijn gelijk. Om zo'n figuur te kunnen tekenen verdeel je hem vanuit één hoekpunt in driehoeken. Omdat hij uit vijf driehoeken bestaat is zijn totale hoekensom $5 \cdot 180 = 900°$. Elke hoek is dan $900/7 \approx 128{,}6°$.
Nu kun je de regelmatige zevenhoek tekenen. Je weet immers alle hoeken en alle zijden, dus de figuur ligt vast.

In het algemeen kun je een veelhoek tekenen als alle hoeken op één na bekend zijn en alle zijden op één na bekend zijn. Alleen bij driehoeken kun je met minder gegevens toe. Als de lengtes van de zijden bekend zijn ligt de driehoek al vast en kun je hem tekenen. Maar een driehoek ligt ook vast als een zijde met twee hoeken bekend zijn, of een hoek met de zijden op de benen van die hoek. Kijk nog maar eens bij de congruentiegevallen.



Figuur 3

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt verteld hoe je een regelmatige zevenhoek kunt tekenen.

a Construeer een regelmatige zevenhoek met zijden van 2 cm.

b Geldt de hoekensom van 900° ook voor niet-regelmatige zevenhoeken? Licht je antwoord toe.

Als van een driehoek de drie zijden gelijk zijn, dan geldt dit ook voor de hoeken.

c Als van een zevenhoek alle zijden gelijk zijn, geldt dit dan automatisch ook voor de hoeken?

Opgave 2

Van een regelmatige zeshoek $ABCDEF$ zijn alle zijden 4 cm.

a Construeer deze regelmatige zeshoek.

b Teken de omgeschreven cirkel van deze zeshoek.

c Bij een regelmatige zeshoek is de straal van de omgeschreven cirkel gelijk aan de lengte van een zijde. Leg uit waarom dit zo is.

d Teken de ingeschreven cirkel van deze regelmatige zeshoek en bereken de straal ervan.

Opgave 3

Van een vierhoek $ABCD$ zijn alle zijden 4 cm.

a Hoe noem je zo'n vierhoek? Kun je hem tekenen?

b Neem $\angle A = 60°$. Kun je nu de vierhoek construeren?

c Is dit een regelmatige vierhoek?

d Heeft deze vierhoek een omgeschreven cirkel?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Alleen driehoeken zijn **star**: als de lengtes van de drie zijden bekend zijn, ligt de vorm van de driehoek vast. Hij is dan niet meer te vervormen. (Daarom worden in constructies die hun vorm moeten behouden altijd driehoeken gebruikt.) Elke driehoek heeft een omgeschreven cirkel en een ingeschreven cirkel.
Als van een driehoek alle zijden gelijk zijn, zijn de hoeken dat automatisch ook, alle drie 60°.

Figuur 4

Voor vierhoeken, vijfhoeken, etc., geldt dit niet. Om die te kunnen tekenen heb je gegevens nodig over zowel hun zijden als hun hoeken. Zelfs als alle zijden gelijk zijn, hoeft dit nog niet voor de hoeken te gelden. Alleen de **regelmatige veelhoeken** vormen hierop een uitzondering, daarvan zijn zowel de hoeken als de zijden gelijk.

De hoekensom van elke n-hoek is $(n-2) \cdot 180°$.

Dat komt omdat hij in $n-2$ driehoeken is op te delen.

Veelhoeken hebben in het algemeen geen omgeschreven cirkel en ook geen ingeschreven cirkel. Alleen driehoeken en regelmatige veelhoeken hebben wel van dergelijke cirkels.
Een **omgeschreven cirkel** teken je door de middelloodlijnen van de zijden van de figuur met elkaar te snijden. Als alle middelloodlijnen precies één snijpunt hebben is dit snijpunt het middelpunt van de omgeschreven cirkel.

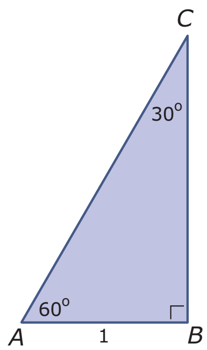
Voorbeeld 1

Je ziet hier ΔABC met $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$ en $AB = 1$ cm.
Laat zien, dat $AC = 2$ en $BC = \sqrt{3}$ cm.

Antwoord

Als je deze driehoek spiegelt in lijn BC zie je dat hij de linkerhelft van een gelijkzijdige driehoek ADC is. Daarvan is $AD = 2 \cdot AB = 2 \cdot 1 = 2$ cm.

Dit betekent dat ook $AC = 2$ cm.
En dan kun je met behulp van de stelling van Pythagoras berekenen dat $BC = \sqrt{3}$ cm.



Figuur 5

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. Een rechthoekige driehoek met hoeken van 60° en 30° blijkt een bijzondere driehoek te zijn. Als je één zijde weet, kun je de andere twee berekenen.

a Laat zien, dat $BC = \sqrt{3}$ cm.

b Teken de omgeschreven cirkel van deze driehoek en bereken de straal ervan.

c Teken in deze driehoek hoogtelijn BD en bereken de lengte ervan.

Opgave 5

Op een cirkel met een straal van 4 cm liggen acht punten die op gelijke afstanden van elkaar over de cirkelomtrek zijn verdeeld. Zo ontstaat een regelmatige achthoek $ABCDEFGH$. Punt M is het midden van de cirkel.

a Teken deze achthoek.

b Hoe groot is elke hoek van deze achthoek?

Je kunt van deze achthoek de lengtes van de zijden berekenen. Misschien wil je daar eerst zelf op puzzelen. Met behulp van de volgende opdrachten kom je er ook achter.

c Teken driehoek ACE en leg uit waarom die driehoek zowel rechthoekig als gelijkbenig is.

d Als P het midden van AC is, dan is $MP = 2\sqrt{2}$. Laat dat zien.

e Nu weet je van driehoek APB de lengtes van AP en PB. Bereken de lengte van AB in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Vierhoek met omgeschreven cirkel

Van vierhoek $ABCD$ is gegeven dat $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 4$ en $\angle B = 90°$.
Laat zien dat er meerdere vierhoeken mogelijk zijn, maar dat maar één van die vierhoeken een omgeschreven cirkel heeft.

Antwoord

Teken een paar van deze vierhoeken. Begin met de zijden AB en BC die loodrecht op elkaar staan. Punt D ligt op een cirkel met straal 4 cm en middelpunt A. Waar het punt op die cirkel ligt kun je zelf nog bepalen.
Teken nu de omgeschreven cirkel met behulp van de middelloodlijnen van AB en BC. Er zijn twee punten waar de omgeschreven cirkel en de cirkel waar punt D op ligt elkaar snijden. Slechts één van die punten levert een vierhoek $ABCD$ op met een omgeschreven cirkel.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken zelf enkele mogelijke vierhoeken $ABCD$ zoals in het voorbeeld beschreven.

b Teken de vierhoek die een omgeschreven cirkel heeft en aan de beschrijving voldoet.

c Neem aan dat de vierhoek geen omgeschreven cirkel heeft. Hoe groot is dan de kortste lengte die CD kan hebben?

Opgave 7

Van een gelijkbenig trapezium $ABCD$ zijn de zijden AB en DC evenwijdig, $AD = BC$ en $AB \neq DC$. Gegeven is verder $\angle A = 60°$, $AB = 6$ cm en $AD = 4$ cm.

a Construeer dit trapezium.

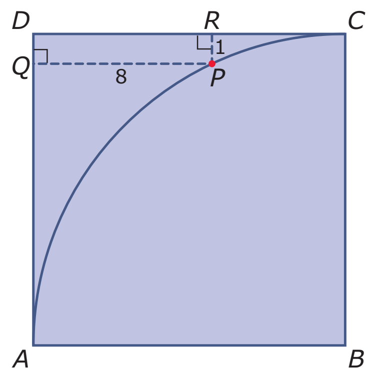
b Bereken de lengte van DC.

c Bereken de hoogte en de oppervlakte van dit trapezium.

d In dit trapezium kun je de diagonalen AC en BD tekenen. Deze diagonalen snijden elkaar in punt S. Bereken de lengte van BS.

Voorbeeld 3

Binnen een vierkant $ABCD$ is een kwartcirkel beschreven met B als middelpunt en de zijde als straal. Een punt P op de kwartcirkel heeft een afstand 1 tot CD en afstand 8 tot AD.
Bereken de oppervlakte van vierkant $ABCD$.



Figuur 6

Antwoord

Noem de lengte van de zijden van het vierkant r.

Teken loodlijn PS op AB.
In de driehoek SBP geldt: $r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2$.
Dit levert op $r = 13$. De oppervlakte van het vierkant is dus 169.

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 3**.

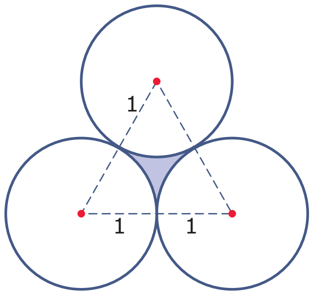
a Leg uit hoe je de vergelijking $r^2 = (r-1)^2 + (r-8)^2$ zelf kunt vinden.

b Bereken zelf dat $r = 13$.

Opgave 9

De straal van deze drie cirkels is gelijk aan 1. Hun middelpunten vormen een gelijkzijdige driehoek met zijden van 2.

Bereken de oppervlakte van het gedeelte dat de drie cirkels gezamenlijk insluiten.



Figuur 7

Opgave 10

Door de hoekpunten C en D van vierkant $ABCD$ gaat een cirkel die met de zijde AB precies één punt P gemeenschappelijk heeft. De zijden van dit vierkant zijn 2 cm.

Bereken de straal van deze cirkel.

Verwerken

Opgave 11

Een regelmatige twaalfhoek heeft zijden met een lengte van 2 cm.

Construeer deze twaalfhoek. Beschrijf hoe je te werk gaat.

Opgave 12

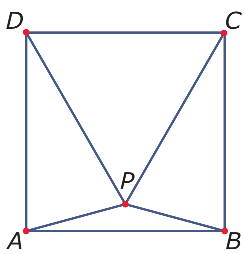
Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Bereken de straal van de ingeschreven cirkel van deze driehoek.

Opgave 13

Je ziet hier een vierkant $ABCD$ met daarin een gelijkzijdige driehoek PCD.

Bereken de grootte van $\angle APB$.



Figuur 8

Opgave 14

Een vlieger is een vierhoek waarvan één van de diagonalen de symmetrieas is. Van vlieger $ABCD$ is dat de diagonaal AC. Dit betekent dat $AB = AD$ en $BC = DC$.

a Kun je vlieger $ABCD$ tekenen als je weet dat $AB = 6$ en $BC = 4$ cm?

b Construeer vlieger $ABCD$ tekenen als je weet dat $AB = 6$, $BC = 4$ cm en $\angle DAB = 60°$.

c Bereken de lengte van diagonaal AC.

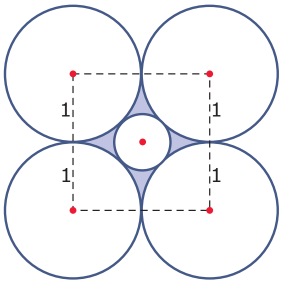
De punten K, L, M en N zijn de middens van achtereenvolgens AB, BC, CD en DA.

d Beredeneer dat $KLMN$ een rechthoek is en bereken de oppervlakte van deze rechthoek.

Opgave 15

Op de hoekpunten van een vierkant met zijden van 2 cm liggen cirkels met een straal van 1 cm. Binnen deze cirkels ligt midden op het vierkant een kleinere cirkel die met elk van die cirkels precies één punt gemeen heeft.

Bereken de straal van die kleinere cirkel.

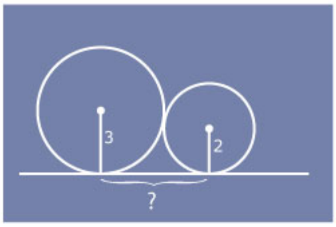


Figuur 9

Toepassen

Een **sangaku** () is een Japanse 'wiskunde-plank', waarop een meetkundige stelling is uitgebeeld.
De originelen dateren uit de Edo-periode (1603—1867) toen Japan in volledig isolement leefde ten opzichte van de Westerse wereld. Ze werden gemaakt door geleerden uit alle lagen van de bevolking. Ze zijn te vinden in oude Shinto-heiligdommen en soms in Boeddhistische tempels waarin ze werden opgehangen uit dankbaarheid voor het vinden van de stelling. Maar meestal werd het bewijs van de stelling achterwege gelaten als uitdaging voor andere meetkundigen.
Ook nu kun je ze nog als uitdaging, als puzzel opvatten...

Kun je deze oplossen?



Figuur 10

Opgave 16: Sangaku (1)

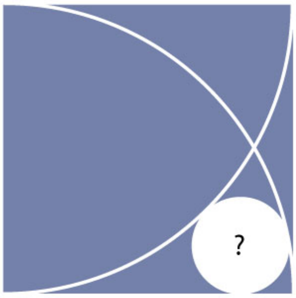
Je ziet hierboven een zogenaamde 'sangaku'. Een mooie puzzel om op te lossen.

Los de puzzel in **Toepassen** op.

Opgave 17: Sangaku (2)

Dit is een vierkant met zijden van 4 waarin twee kwart cirkels zijn getekend.

Bereken de oppervlakte van de witte cirkel.



Figuur 11

Testen

Opgave 18

In een gelijkzijdige ΔABC zijn alle zijden 4 cm.

Een cirkel met middelpunt C heeft precies één punt gemeen met zijde AB.

a Hoe groot is de straal van deze cirkel?

b Bereken de oppervlakte van het gedeelte van de driehoek dat niet binnen de cirkel ligt.

Opgave 19

Teken een regelmatige negenhoek met zijden van 2 cm met zijn omgeschreven cirkel.

© 2024

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.