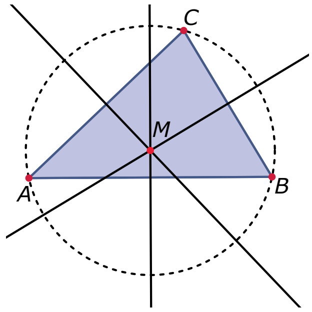
1.3 Stelling en bewijs

Inleiding

Gegeven is een driehoek ABC. Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.

Wat zijn middelloodlijnen eigenlijk precies en gaan ze altijd door één punt?

En zijn er nog andere bijzondere lijnen in driehoeken te tekenen?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een middelloodlijn, wat een zwaartelijn, wat een deellijn en wat een hoogtelijn in een driehoek is en de eigenschappen van deze soorten lijnen herkennen;
- de ingeschreven en de omgeschreven cirkel van een driehoek construeren;
- de begrippen ‘definitie’, ‘vermoeden’ en ‘bewijs’ onderscheiden en een bewijs gebruiken om van een vermoeden een ‘stelling’ te maken (met als voorbeeld de stelling van Thales).

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

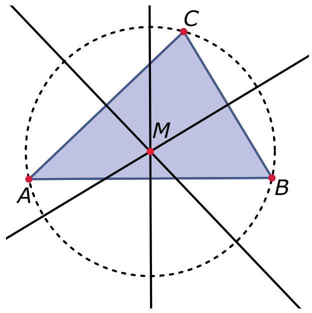
Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet: middelloodlijnen

Gegeven is een driehoek ABC. Van elke zijde is een middelloodlijn getekend. Deze middelloodlijnen lijken door één punt te gaan.

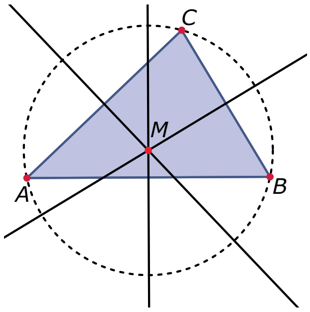
Wat is een middelloodlijn eigenlijk precies? Probeer te beredeneren dat deze middelloodlijnen door één punt moeten gaan en dat dit punt het middelpunt is van een cirkel die altijd door A, B en C gaat.



Figuur 2

Uitleg

Bekijk de applet: middelloodlijnen



Figuur 3

Je ziet hier ΔABC met daarin de drie middelloodlijnen van de zijden getekend. Die drie lijnen lijken door één punt M te gaan en M lijkt het middelpunt te zijn van een cirkel door de drie hoekpunten van die driehoek.

Vooralsnog is de uitspraak dat deze drie middelloodlijnen door één punt gaan een 'vermoeden'. Of heb je al een waterdichte redenering waaruit blijkt dat dit inderdaad altijd waar is? Als dat zo is dan heb je een 'bewijs' geleverd. En als een vermoeden is bewezen, dan spreek je van een 'stelling'. Bij het leveren van een bewijs is enige voorkennis nodig. Bijvoorbeeld wat een middelloodlijn precies is.

Dat moet je dan ook eerst doen: een 'definitie' geven van wat een middelloodlijn is. Zo bijvoorbeeld:

- Een 'middelloodlijn' van een lijnstuk is een lijn die door het midden van dat lijnstuk gaat en er loodrecht op staat, dus de symmetrieas van dat lijnstuk.

Het bewijs van het vermoeden verloopt dan (in grote lijnen) als volgt:

Omdat M op de middelloodlijn van AB ligt is $AM = MB$.
Omdat M op de middelloodlijn van BC ligt is $BM = MC$.
Daaruit volgt dat $AM = MC$ en dus dat M op de middelloodlijn van AC ligt.
En omdat $MA = MB = MC$ ligt M evenver van alle drie de hoekpunten van de driehoek af en dus op de cirkel door die drie hoekpunten. De cirkel door de drie hoekpunten van een driehoek heet de 'omgeschreven cirkel' van die driehoek.

En zo kun je meer uitspraken doen over bijzondere lijnen in driehoeken. Dat zijn dan altijd vermoedens tot er een bewijs voor is gevonden. Dan pas spreek je van een stelling.

Opgave 1

In de **Uitleg** is een bewijs gegeven van het vermoeden dat de drie middelloodlijnen van een driehoek door één punt gaan. Het bewijs is nog niet waterdicht als je er goed over nadenkt.

a Hoe volgt uit het feit dat M op middelloodlijn van AB ligt dat $AM = MB$? Probeer te laten zien dat $\Delta APM \cong \Delta BPM$.

b Hoe volgt uit het $AM = MB$ en $BM = MC$ dat $AM = MC$?

c Waarom volgt uit het feit dat $AM = MC$ dat M ook op de middelloodlijn van AC ligt? (Tip: Teken nu een lijn door M en loodrecht op AC en vindt twee geschikte congruente driehoeken.)

Opgave 2

De deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die deze hoek in twee gelijke delen verdeeld.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de deellijnen van elk van de drie hoeken van de driehoek.

b Gaan de drie deellijnen door één punt D?

c Teken vanuit punt D het lijnstuk DP loodrecht op AB. Teken zo ook DQ loodrecht op BC en DR loodrecht op AC. Zijn deze drie lijnstukken even lang?

d Probeer met behulp van twee congruente driehoeken te bewijzen dat $DP = DR$.

e Omdat $DP = DQ = DR$ kun je een cirkel tekenen die precies door P, Q en R gaat en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de ingeschreven cirkel van ΔABC.

Opgave 3

Een zwaartelijn in een driehoek is een lijn door een hoekpunt en het midden van de zijde tegenover dat hoekpunt.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de drie zwaartelijnen CP, AQ en BR van de driehoek.

b Gaan de drie zwaartelijnen door één punt Z?

Het bedoelde punt Z heet het zwaartepunt van de driehoek.

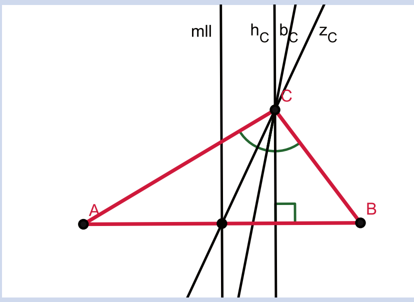
c Wat heeft dit punt met de zwaartekracht te maken? Kun je ook verklaren waarom dit zo is?

d Door punt Z wordt elke zwaartelijn in twee stukken verdeeld. Bijvoorbeeld de zwaartelijn AQ wordt verdeeld in de stukken AZ en ZQ. Probeer aan te tonen dat die stukken zich steeds verhouden als $2:1$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: bijzondere lijnen in een driehoek



Figuur 4

In veel vlakke figuren kun je bijzondere lijnen tekenen. Je ziet hier in ΔABC:

- de **middelloodlijn** van zijde AB, dat is een lijn die deze zijde loodrecht middendoor deelt;
- de **deellijn** of **bissectrice** van $\angle C$, dat is een lijn die deze hoek middendoor deelt;
- de **zwaartelijn** vanuit punt C, dat is een lijnstuk vanuit dit punt naar het midden van de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C);
- de **hoogtelijn** vanuit punt C, dat is een lijnstuk vanuit dit punt loodrecht op de overstaande zijde (de zijde tegenover punt C).

Dit zijn **definities** van de genoemde begrippen. Andere voorbeelden zijn:

- de **omgeschreven cirkel** van een driehoek is de cirkel door de drie hoekpunten;
- de **ingeschreven cirkel** van een driehoek is de grootste cirkel die nog precies binnen de driehoek ligt.
- een **gelijkbenige driehoek** is een driehoek met twee gelijke zijden;
- een **gelijkzijdige driehoek** is een driehoek met drie gelijke zijden.

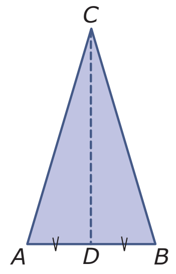
Deze lijnen hebben bepaalde eigenschappen. Je kunt uitspraken doen als “De drie middelloodlijnen in een driehoek gaan door één punt en dat punt is het middelpunt van een cirkel door de drie hoekpunten van de driehoek.”
Zo'n uitspraak is een **vermoeden** tot je met een waterdichte redenering hebt aangetoond dat hij altijd waar is. Zo'n redenering heet een **bewijs**. En het vermoeden noem je daarna een **stelling**.

Het vinden van een sluitend bewijs is lang niet altijd eenvoudig, wiskundigen studeren daar soms jaren, zelfs eeuwen op...

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: bijzondere lijnen in een driehoek

Een gelijkbenige ΔABC heeft een tophoek C.
Bewijs dat de zwaartelijn uit punt C ook een hoogtelijn is.



Figuur 5

Antwoord

Noem de zwaartelijn CS, het snijpunt met AB is dus punt S.

Een zwaartelijn gaat vanuit punt C naar het midden van zijde AB.

Dus is $AS = SB$. De driehoek was gelijkbenig en dus geldt ook $AB = AC$.

Omdat ook $CS = CS$ zijn de driehoeken ASC en BSC congruent (ZZZ).

Hieruit volgt weer dat $\angle ASC = \angle BSC$. Omdat ze samen $180°$ graden zijn, is elk van deze hoeken $90°$. Zwaartelijn CS is dus ook een hoogtelijn.

Opgave 4

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 1**. Ga weer uit van een gelijkbenige driehoek ABC met C als tophoek.

a Bewijs op dezelfde manier dat zwaartelijn CS ook deellijn van $\angle C$ is.

b Bewijs dat de deellijn van $\angle C$ ook middelloodlijn van AB is.

Opgave 5

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Construeer van deze driehoek zowel de omgeschreven cirkel als de ingeschreven cirkel.

Opgave 6

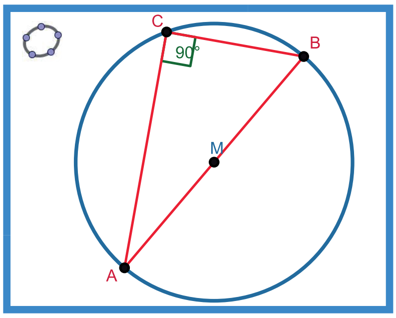
In elke driehoek ABC is de som van de hoeken $180°$.

Bewijs dat met behulp van een willekeurige driehoek waarin je door hoekpunt C een lijn trekt die evenwijdig is met AB.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: stelling van Thales

Gegeven is een cirkel met middelpunt M, middellijn AB en een punt C op de cirkelboog.
Geef een bewijs dat ΔABC rechthoekig is.
(Dit heet de stelling van **Thales**.)



Figuur 6

Antwoord

Teken hulplijn CM. De driehoeken AMC en BMC zijn gelijkbenig. Dit betekent dat $\angle A = \angle ACM$ en $\angle B = \angle BCM$.
Nu zijn de hoeken van ΔABC samen $180°$.
Uit dit alles kun je afleiden dat $\angle ACM + \angle BCM = 90°$ en dus dat ΔABC rechthoekig is.

Opgave 7

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 2**. Er wordt gebruik gemaakt van de stelling dat in een gelijkbenige driehoek de twee basishoeken gelijk zijn. Dat moet je eigenlijk nog bewijzen.

a Waarom zijn de driehoeken AMC en BMC gelijkbenig?

b Waar wordt van die stelling gebruik gemaakt?

c Bewijs de stelling dat in een gelijkbenige driehoek ABC de basishoeken even groot zijn. Gebruik als hulplijn een zwaartelijn uit de tophoek C.

d Laat zien, waarom $\angle ACM + \angle BCM = 90°$.

e Mag punt C overal op de cirkel liggen? Licht je antwoord toe.

Opgave 8

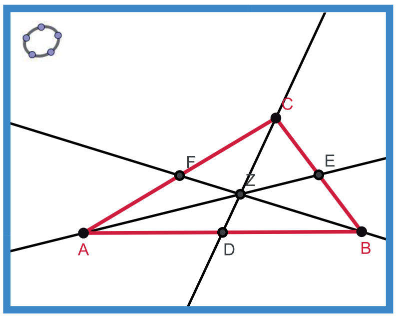
Teken een cirkel met middelpunt M en middellijn AC. Teken ook de middellijn BD.

Bewijs dat vierhoek $ABCD$ een rechthoek is.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: zwaartelijnen

Je ziet hiernaast ΔABC waarin de drie zwaartelijnen zijn getekend. Deze lijnstukken verbinden een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde. Hun snijpunt is het zwaartepunt Z van de driehoek. Dit zwaartepunt verdeelt elke zwaartelijn in twee lijnstukken die zich verhouden als 2 : 1.
Bewijs dit.



Figuur 7

Antwoord

Teken lijnstuk EF.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en FEC volgt $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.
En daarom is $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$. De overeenkomstige zijden vormen dus een verhoudingstabel:

AB	BZ	AZ
EF	FZ	EZ

Tabel 1

De vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ bedraagt $\frac{1}{2}$, dus $EZ = \frac{1}{2} \cdot AZ$ en $FZ = \frac{1}{2} \cdot BZ$. En dus is $AZ : EZ = BZ : FZ = 2 : 1$.

Opgave 9

Bekijk het bewijs in **Voorbeeld 3**. Het bewijs is niet helemaal volledig uitgewerkt.

a Teken zelf ΔABC met de zwaartelijnen AE en BF en teken lijnstuk EF.
Waarom zijn de driehoeken ABC en FEC gelijkvormig?

b Leg uit, dat dit betekent dat $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.

c Leg uit, dat uit het voorgaande volgt dat $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$.

d Hoe kom je aan de vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ?

Opgave 10

De stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als 2 : 1 kun je gebruiken bij meetkundige berekeningen.

Van een gelijkbenige driehoek ABC is $AB = AC = 6$ en $BC = 4$ cm. De drie zwaartelijnen snijden elkaar in punt Z.
Bereken de lengte van lijnstuk AZ.

Opgave 11

Ook in een vierhoek kun je kijken naar de middens van de zijden. Van een vierhoek $ABCD$ is P het midden van AB, Q het midden van BC, R het midden van CD en R het midden van DB.

a Teken zo'n vierhoek met de punten P, Q, R en S.

b Bewijs dat $PQ = RS = \frac{1}{2} \cdot AC$ en dat $PQ // RS$.

c Wat voor soort vierhoek is $PQRS$?

Verwerken

Opgave 12

Van een driehoek PQR is gegeven dat de deellijn van $\angle P$ en de hoogtelijn vanuit hoekpunt P samenvallen.

a Bewijs dat driehoek ΔPQR een gelijkbenige driehoek is.

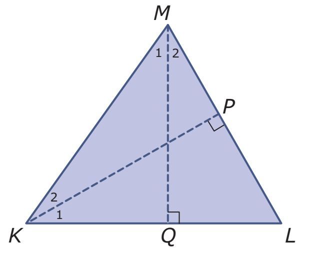
b Teken de omgeschreven cirkel van zo'n ΔPQR.

c Teken de ingeschreven cirkel van zo'n ΔPQR.

Opgave 13

Je ziet hier een driehoek KLM met de hoogtelijnen vanuit M op zijde KL en vanuit K op zijde ML.

Bewijs dat $\angle K_1 = \angle M_2$.



Figuur 8

Opgave 14

Je hebt bewezen dat de som van de hoeken van een driehoek altijd 180° is. Elke vierhoek kun je verdelen in twee driehoeken.

a Hoe groot is de som van de hoeken van een vierhoek? Geef ook een bewijs.

b Hoe groot is de som van de hoeken van een vijfhoek?

c Hoe groot is de som van de hoeken van een n-hoek?

Opgave 15

In een lokaal hangt een schoolbord dat 4 meter breed is. Priscilla ziet het bord onder een hoek van 90 graden. Dit houdt in dat haar beide kijklijnen naar de uiterste verticale randen van het bord een hoek van 90° met elkaar maken.

Teken het bord als een lijnstuk AB op schaal 1 : 100 en geef drie plaatsen aan waar Priscilla gestaan kan hebben.

Opgave 16

In een rechthoekige driehoek PQR is $\angle Q = 90°$, $PQ = 24$ en de zwaartelijn $PT = 26$ cm. De zwaartelijnen PT en RU snijden elkaar in Z.

Bereken de lengte van lijnstuk UZ.

Opgave 17

Als de zwaartelijn in een driehoek even lang is als de helft van de zijde waar hij naar toe loopt, dan is de driehoek rechthoekig.

Bewijs deze stelling.

Toepassen

Bekijk de applet: vierkant in rechthoek

Gegeven is een rechthoek $ABCD$. In elk hoekpunt is een deellijn getekend. Deze deellijnen sluiten een vierhoek $EFGH$ in. Het lijkt er op dat dit een vierkant is.

Kun je dit bewijzen?

Opgave 18: Deellijnen in een rechthoek

In **Toepassen** wordt verteld dat de vier deellijnen van een rechthoek een vierkant insluiten.

Bewijs deze stelling.

Opgave 19: Deellijnen in een parallellogram

Gegeven is een parallellogram met de deellijnen van de vier hoeken. Het lijkt dat deze deellijnen een rechthoek insluiten.

Bewijs deze stelling.

Testen

Opgave 20

In een ΔABC geldt $AB = AC$.

a Bewijs dat de hoogtelijn uit A ook de bissectrice van $\angle BAC$ is.

b Bewijs dat de hoogtelijn uit A ook de zwaartelijn uit A is.

Opgave 21

Van ΔABC is $\angle A = 50°$, is $AB = 6$ en $AC = 5$.

Teken de driehoek met zijn omgeschreven cirkel.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.