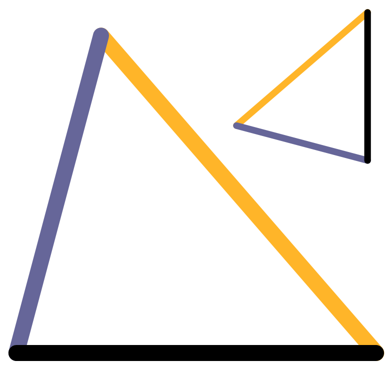
1.2 Driehoeken

Inleiding

Hier zie je twee driehoeken.
Ze zijn gelijkvormig. Dat betekent dat hun hoeken gelijk zijn. En voor driehoeken is dat ook genoeg, hun zijden hebben dan automatisch een vaste vergrotingsfactor. De zijden van de grote driehoek zijn bijvoorbeeld allemaal 2,5 keer zo groot als die van de kleinere.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wanneer driehoeken congruent en wanneer driehoeken gelijkvormig zijn;
- gelijkvormige driehoeken gebruiken bij berekeningen.

Voorkennis

- wat congruente (gelijke) figuren en wat gelijkvormige figuren zijn;
- overeenkomstige hoeken en zijden herkennen;
- het begrip vergrotingsfactor en daarmee zijden berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Om een driehoek te kunnen tekenen moet je er iets van weten. Bijvoorbeeld hoe lang de drie zijden zijn. Of hoe groot een hoek is en hoe lang de twee zijden op de benen van die hoek zijn.

a Teken ΔABC met $\angle A = 55°$, $AB = 5$ cm en $AC = 4$ cm. Krijgt iedereen die dit doet dezelfde driehoek?

b Teken ΔABC met $\angle A = 55°$, $AB = 5$ cm en $BC = 4$ cm. Is er nu maar één driehoek mogelijk?

Opgave V2

Je weet van ΔABC alleen de twee hoeken $\angle A = 55°$ en $\angle B = 80°$.

a Teken twee van die driehoeken.

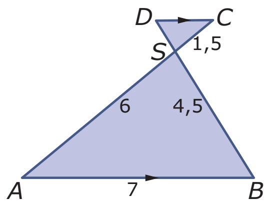
b Wat valt op als je beide driehoeken vergelijkt?

Uitleg

Als verschillende mensen de opdracht krijgen om een driehoek ABC met $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 8$ cm te tekenen, krijgen ze allemaal dezelfde driehoek. Driehoeken waarvan de overeenkomstige zijden gelijk zijn, zijn dus congruent. Je zegt wel dat gelijke overeenkomstige zijden bij driehoeken een congruentiekenmerk is.

Er zijn meer van die congruentiekenmerken, bijvoorbeeld als twee driehoeken een hoek en de zijden op de benen van die hoek gelijk hebben zijn ze congruent.

Als verschillende mensen de opdracht krijgen om een driehoek ABC te tekenen met $\angle A = 60°$ en $\angle B = 40°$, krijgen ze niet altijd dezelfde driehoeken. Maar al hun driehoeken worden wel gelijkvormig.
Twee gelijke hoeken is een gelijkvormigheidskenmerk.



Figuur 2

Dus als je van twee driehoeken kunt beredeneren dat ze twee paar gelijke hoeken hebben, dan weet je dat ze gelijkvormig zijn. In de figuur hiernaast kun je beredeneren dat de driehoeken ABS en CDS twee paar gelijke hoeken hebben. Dat volgt uit de evenwijdigheid van AB en CD. De overeenkomstige zijden van deze twee driehoeken vormen daarom een verhoudingstabel.

AB 7 cm	BS 4,5 cm	AS 6 cm
CD a cm	DS b cm	CS 1,5 cm

Tabel 1

De twee onbekende zijden kun je nu uitrekenen met behulp van de vergrotingsfactor van ΔABS naar ΔCDS.

Opgave 1

In de **Uitleg** wordt besproken wanneer twee driehoeken congruent zijn. Dat is bijvoorbeeld zo als hun overeenkomstige zijden gelijk zijn.

a Waarom zijn twee driehoeken ook congruent als ze een hoek en de zijden op de benen van die hoek gelijk hebben?

b Waarom zijn twee driehoeken niet congruent als ze twee zijden en een hoek die niet door deze twee zijden wordt ingesloten gelijk hebben?

c Maak een overzicht van alle situaties waarin twee driehoeken congruent zijn.

Opgave 2

Bekijk de figuur in de **Uitleg**.

a Waarom is $\angle ASB = \angle CSD$?

b Waarom is $\angle ABS = \angle CDS$?

c In de tekst wordt uitgelegd dat $\Delta ABS \sim \Delta CDS$. Staan de letters hierbij in de juiste volgorde?

d Hoeveel bedraagt de vergrotingsfactor van ΔABS naar ΔCDS?

e Bereken de lengtes van CD en DS.

Opgave 3

Je hebt in de vorige paragraaf gezien dat twee driehoeken gelijkvormig zijn als hun overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Je hoeft dan niet ook nog te kijken of de overeenkomstige zijden een verhoudingstabel vormen, dat zit dan automatisch wel goed.
Zo zijn twee driehoeken ook gelijkvormig als de overeenkomstige zijden een verhoudingstabel vormen. Je hoeft dan niet meer de hoeken te vergelijken, dat zit meteen goed.

Maak een overzicht van alle gevallen waarin je kunt besluiten dat twee driehoeken gelijkvormig zijn.

Theorie en voorbeelden

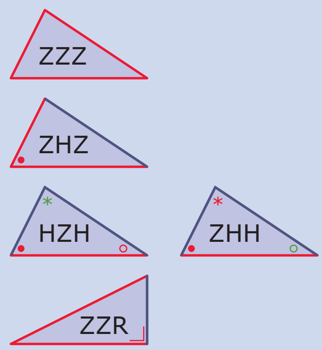
Om te onthouden

Twee driehoeken zijn **congruent** als ze

- drie paren overeenkomstige zijden gelijk hebben;
- een hoek en de twee zijden op de benen van die hoek gelijk hebben;
- één zijde en twee paren overeenkomstige hoeken gelijk hebben;
- twee zijden gelijk hebben en rechthoekig zijn.

Je komt congruente driehoeken vaak tegen in symmetrische figuren. Met behulp van congruentie kun je eigenschappen van dergelijke figuren afleiden. Het gaat er dan vaak om dat je aantoont dat bepaalde lijnstukken even lang zijn.

Congruentie

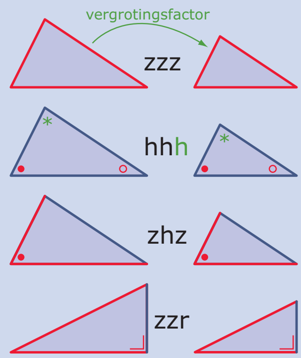


Figuur 3

Twee driehoeken zijn **gelijkvormig** als

- de drie paren overeenkomstige zijden een verhoudingstabel vormen;
- er twee paren gelijke overeenkomstige hoeken zijn (Het derde paar is dan automatisch ook gelijk.);
- er één paar gelijke overeenkomstige hoeken zijn en de twee paren overeenkomstige zijden op de benen van die hoeken een verhoudingstabel vormen;
- beide driehoeken een rechte hoek hebben en twee paren overeenkomstige zijden een verhoudingstabel vormen.

Gelijkvormigheid

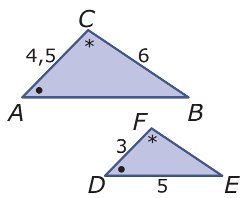


Figuur 4

Bij gelijkvormige driehoeken kun je een **verhoudingstabel** maken waarin de overeenkomstige zijden boven elkaar staan. De bijbehorende vergrotingsfactor bereken je door de lengtes van twee overeenkomstige zijden op elkaar te delen. En met die vergrotingsfactor kun je vaak onbekende lengtes van lijnstukken berekenen.

Voorbeeld 1

Je ziet hiernaast twee gelijkvormige driehoeken. Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn en bereken de lengtes van AB en EF.



Figuur 5

Antwoord

Beide driehoeken hebben twee paren gelijke hoeken. Daarom zijn ze gelijkvormig. De overeenkomstige zijden vormen dus een verhoudingstabel:

AB x	BC 6	AC 4,5
DE 5	EF y	DF 3

Tabel 2

De vergrotingsfactor van ΔABC naar ΔDEF bedraagt $3\big/4{,}5 = \frac{2}{3}$, dus $EF = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.
De vergrotingsfactor van ΔDEF naar ΔABC bedraagt $4{,}5/3 = 1{,}5$, dus $AB = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$.

Opgave 4

Bekijk **Voorbeeld 1**. De twee driehoeken zijn gelijkvormig omdat ze twee paren gelijke hoeken hebben.

a Waarom betekent dit automatisch dat er drie paren gelijke hoeken zijn?

b Zijde EF wordt berekend met de vergrotingsfactor $\frac{2}{3}$. Kun je die zijde ook berekenen met de omgekeerde vergrotingsfactor $\frac{3}{2}$? Licht je antwoord toe.

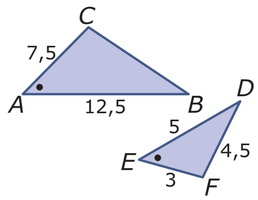
Opgave 5

Hier zie je twee gelijkvormige driehoeken.

a Waarom zijn ze gelijkvormig?

b Vul aan (denk om de juiste volgorde van de letters): $\Delta ABC \sim \ldots$.

c Bereken de lengte van BC.

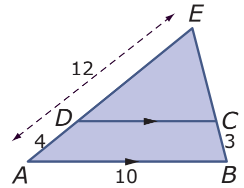


Figuur 6

Voorbeeld 2

In deze figuur zijn AB en CD evenwijdig.

Bereken de lengte van CD en die van CE.



Figuur 7

Antwoord

Omdat $\angle A = \angle CDE$ (F-hoeken) en $\angle B = \angle DCE$ (F-hoeken) is $\Delta ABE \sim \Delta DCE$.

Maak nu een verhoudingstabel voor de zijden en vul getallen of onbekenden in.

AB 10 cm	BE $x + 3$ cm	AE 12 cm
DC y cm	CE x cm	DE 8 cm

Tabel 3

De vergrotingsfactor van ΔABE naar ΔDCE is $8 \big/ 12 = \frac{2}{3}$.

$CD = \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{20}{3}$.

Om CE te berekenen gebruik je $x = \frac{2}{3} \cdot (x + 3)$. Hieruit volgt $x = 6$ en dus $CE = 6$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe je in situaties waarin sprake is van evenwijdige lijnen gelijkvormige driehoeken kunt vinden en met behulp daarvan lengtes van lijnstukken berekenen.

a Waarom is $\Delta ABE \sim \Delta DCE$?

b Leg uit waarom $DE = 8$.

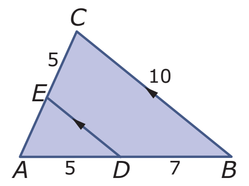
c Laat zien, dat inderdaad $CE = 6$.

Opgave 7

In deze figuur is $AB//DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.

a Waarom is $\Delta ABC \sim \Delta ADE$?

b Bereken de lengte van DE en van AE.



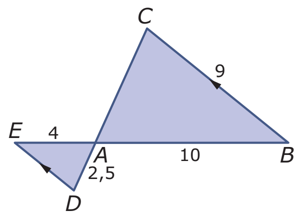
Figuur 8

Opgave 8

In deze figuur is $AB//DE$. De gegeven lengtes zijn in cm.

a Vul aan $\Delta ABC \sim ...$ en leg uit waarom deze driehoeken gelijkvormig zijn.

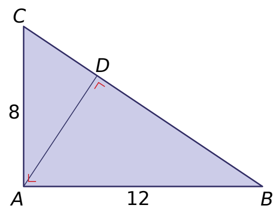
b Bereken de lengte van DE en van AC.



Figuur 9

Voorbeeld 3

Bereken de lengte van AD in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 10

Antwoord

In rechthoekige driehoeken geldt ook de stelling van Pythagoras. Je kunt dus ook de lengte van BC berekenen met $BC^2 = 12^2 + 8^2$, dus $BC = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{208}$.

In deze figuur zijn drie gelijkvormige driehoeken te vinden, namelijk ΔABC, ΔDAC en ΔDBA. Ga na dat van die driehoeken alle drie de paren overeenkomstige hoeken gelijk zijn.

Neem nu bijvoorbeeld de driehoeken ΔABC en ΔDAC en maak een verhoudingstabel voor de zijden.

AB 12 cm	BC $\sqrt{208}$ cm	AC 8 cm
DA x cm	AC 8 cm	DC y cm

Tabel 4

De vergrotingsfactor van ΔABE naar ΔDAC is $8 \big/ \sqrt{208}$.

$AD = 8 \big/ \sqrt{208} \cdot 12 \approx 6{,}7$ cm.

Opgave 9

In **Voorbeeld 3** gaat het om het herkennen van gelijkvormige rechthoekige driehoeken.

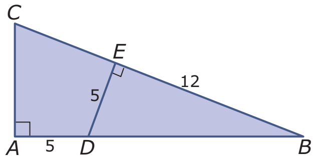
a Waarom is $\Delta ABC \sim \Delta DAC$?

b Voer zelf de berekening van AD uit.

c Bereken de lengte van BD in één decimaal nauwkeurig. Doe dit een keer met behulp van de stelling van Pythagoras en ook een keer met behulp van gelijkvormigheid.

Opgave 10

Bereken AC.



Figuur 11

Verwerken

Opgave 11

Bekijk de figuur hiernaast. Alle afmetingen zijn in cm.

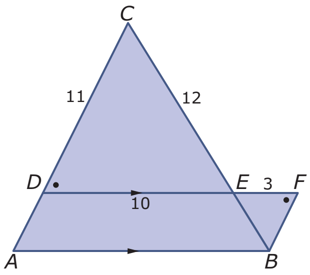
a Licht toe waarom de driehoeken DEC en FEB gelijkvormig zijn.

b Bereken de lengte van EB.

Je wilt de lengte van AB berekenen.

c Welke gelijkvormige driehoeken gebruik je? Schrijf de gelijkvormigheid op de juiste wijze op.

d Bereken de lengte van AB.



Figuur 12

Opgave 12

Gegeven is ΔABC met $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm en $AC = 7$. Op zijde AC ligt punt D zo, dat $\angle DBC = \angle A$.

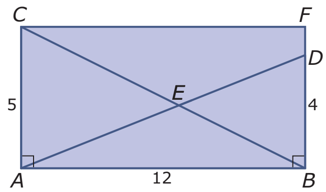
a Teken de driehoek met lijnstuk BD er in. Welke twee gelijkvormige driehoeken zijn er? Leg uit waarom ze gelijkvormig zijn.

b Punt D verdeelt de zijde AC in de twee stukken AD en DC. Bereken de lengte van die twee lijnstukken.

Opgave 13

Bekijk de figuur.

Bereken CE en ED in één decimaal nauwkeurig.



Figuur 13

Opgave 14

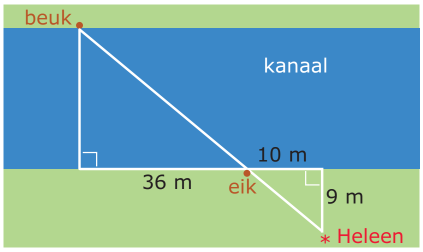
De hoogte van een boom kun je bepalen door de lengte van zijn schaduw te meten. Boris meet dat een boom een schaduw heeft van 25 m. Hijzelf heeft een schaduw van 1,40 m. Nu is Boris 1,80 m lang.

Bereken de hoogte van de boom in m nauwkeurig.

Opgave 15

Heleen wil de breedte van een kanaal schatten. Ze gebruikt daarbij twee bomen die aan de oevers van het kanaal staan. Eerst bepaalt ze dat de afstand tussen beide bomen gemeten langs de oever 36 m is. Ze loopt dan nog 10 m door en bepaalt dan de afstand tot de oever van het punt waar ze beide bomen op één lijn ziet staan. In de figuur zie je een schets van de situatie.

Bereken de breedte van het kanaal in m nauwkeurig.

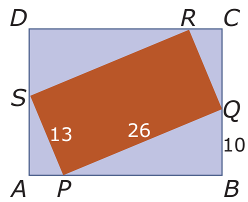


Figuur 14

Opgave 16

Je ziet hier hoe rechthoek $PQRS$ precies past in rechthoek $ABCD$. Alle afmetingen zijn in mm.

Bereken de lengte en de breedte van rechthoek $ABCD$.

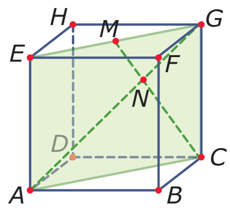


Figuur 15

Toepassen

Ook in ruimtelijke figuren komen congruente of gelijkvormige vlakke figuren voor. Je kunt daarvan bij het berekenen van lengtes van lijnstukken goed gebruik maken.

Bekijk de kubus hiernaast maar eens. Alle ribben zijn 4 cm lang. Punt M is het midden van EG. Met behulp van gelijkvormigheid en de stelling van Pythagoras kun je de lengtes van AN en CN berekenen.



Figuur 16

Opgave 17: Lijnstukken in een kubus

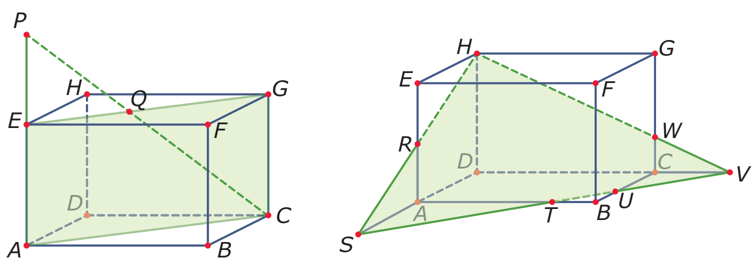
Hierboven wordt verteld dat je gelijkvormigheid ook goed kunt toepassen in ruimtelijke figuren, zoals een kubus.

Bekijk de figuur. Bedenk dat diagonaalvlak $ACGE$ een rechthoek is.

Teken dit diagonaalvlak op ware grootte en bereken met behulp van gelijkvormigheid de lengtes van AN en CN.

Opgave 18: Lijnstukken in een balk

Hier zie je twee keer de balk $ABCD.EFGH$. Gegeven is $AB = 8$, $AD = 4$ en $AE = 4$ cm. Punt P ligt op het verlengde van AE en $EP = 3$ cm. Verder is punt R het midden van AE, ligt punt S op het verlengte van DA en ligt punt V op het verlengte van DC met $CV = 2$ cm.



Figuur 17

Bereken de lengtes van EQ, AS, CW en TU.

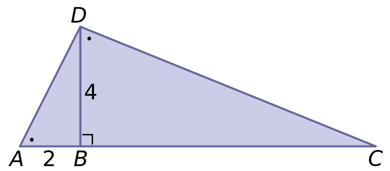
Testen

Opgave 19

Je ziet hier twee rechthoekige driehoeken die tegen elkaar zijn gelegd.

a Waarom zijn beide driehoeken gelijkvormig?

b Bereken de lengte van CD.



Figuur 18

Opgave 20

Je kunt met een rechte stok gemakkelijk hoogtes meten op een zonnige dag.
Je wilt de hoogte van een verticale vlaggenmast weten. Je meet de lengte van de schaduw van die mast: 10,5 m. Je houdt je stok verticaal op de grond en meet ook daarvan de lengte van de schaduw. Je hebt een stok van 60 cm en de schaduw is 75 cm lang.

Hoe hoog zit de top van de vlaggenmast boven de grond?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.