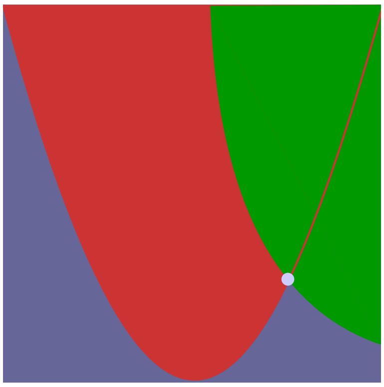
4.4 Functies vergelijken

Inleiding

Je ziet hier twee overlappende standaardvormen.
Het gaat alleen over de randen van de gekleurde gbieden. Het snijpunt van die randen (grafieken van functies) is getekend. Je gaat nu weer zien hoe dergelijke snijpunten kunnen worden berekend en hoe bijpassende vergelijkingen en ongelijkheden kunnen worden opgelost.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- functievoorschriften vergelijken en bijpassende ongelijkheden oplossen.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met functies en grafieken en de bijbehorende notaties gebruiken, ook die voor hun domein en bereik;
- werken met lineaire, kwadratische, gebroken en wortelfuncties.

Verkennen

Opgave V1

Stel je een kubus voor met ribben van r cm lang.

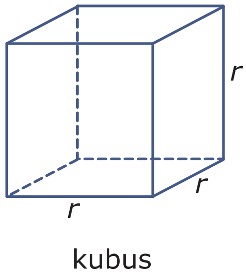
a Geef een formule voor de inhoud $V(r)$ (in cm^3) van de kubus.

b Voor welke waarde van r is de $V(r) > 100$?

c Geef een formule voor de oppervlakte $A(r)$ van de kubus.

d Voor welke waarde van r is de $A(r) > 100$?

e Voor welke waarden van r is de inhoud van de kubus een kleiner getal dan de oppervlakte?



Figuur 2

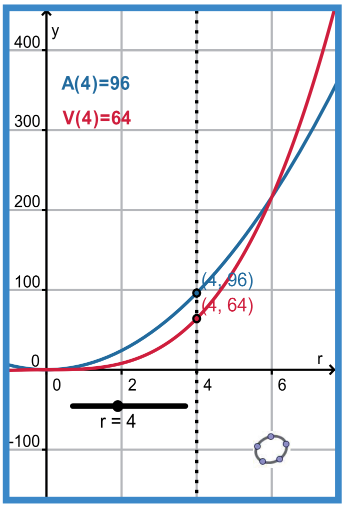
Uitleg

Bekijk de applet: Inhoud en oppervlakte kubus

Stel je een kubus voor met ribben van r cm lang.

Voor de inhoud geldt $V(r) = r^3$ en voor de oppervlakte geldt $A(r) = 6r^2$.
Hier zie je de grafieken van deze functies. Je kunt bij een gewenste waarde van r de functiewaarden aflezen. En daarmee kun je vragen beantwoorden als

- Voor welke r is $V(r) = 100$?
- Voor welke r is $A(r) > 100$?
- Voor welke r is $V(r) = A(r)$?
- Voor welke r is $V(r) < A(r)$?



Figuur 3

Dergelijke vragen heten vergelijkingen (als er een isgelijkteken in voor komt) of ongelijkheden (als er een teken als >, ≥, < of ≤ in voor komt). Voor het oplossen van vergelijkingen heb je technieken als terugrekenen, de balansmethode, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen, de abc-formule, geleerd.

Om een ongelijkheid op te lossen gebruik je vaak grafieken zoals die hiernaast.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafieken van twee functies die de inhoud en de oppervlakte van een kubus beschrijven.

a Je wilt weten voor welke r is $V(r) = 100$? Maak eerst een schatting met behulp van de grafiek.

b Welke vergelijking in r hoort er bij deze vraag? Laat zien hoe je die vergelijking in vier decimalen nauwkeurig oplost met behulp van terugrekenen.

c Geef de exacte oplossing van de ongelijkheid $V(r) > 100$. Hoe gebruik je hier de grafiek bij?

d Geef nu de oplossing van de ongelijkheid $V(r) > 100$ in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 2

Gebruik in de de functie die de oppervlakte van een kubus beschrijft.

a Je wilt weten voor welke r is $A(r) = 100$? Maak eerst een schatting met behulp van de grafiek.

b Welke vergelijking in r hoort er bij deze vraag? Laat zien hoe je die vergelijking in vier decimalen nauwkeurig oplost met behulp van terugrekenen.

c Geef de exacte oplossing van de ongelijkheid $A(r) > 100$. Hoe gebruik je hier de grafiek bij?

d Geef nu de oplossing van de ongelijkheid $A(r) > 100$ in drie decimalen nauwkeurig.

Opgave 3

Gebruik in de de twee functies die de inhoud en de oppervlakte van een kubus beschrijven.

a Je wilt weten voor welke r is $V(r) = A(r)$? Bepaal de oplossing hiervan eerst met de grafieken.

b Welke vergelijking in r hoort er bij deze vraag? Laat zien hoe je die vergelijking oplost.

c Hoe kun je nu aan de grafieken zien voor welke r geldt dat $V(r) < A(r)$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Twee functies vergelijken

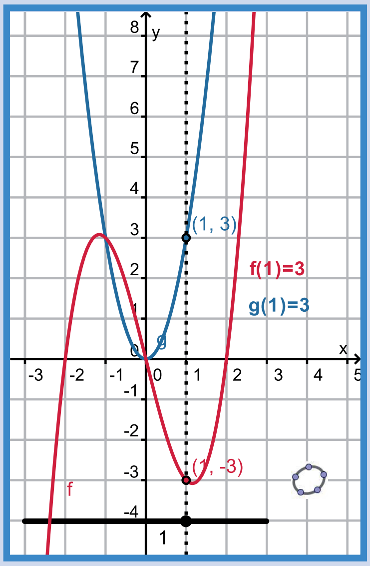
Stel, je hebt twee functies f en g. Je kunt de functiewaarden van functie f vergelijken met een vaste opgegeven waarde. Je krijgt dan

- een **vergelijking** zoals $f(x) = 4$, of
- een **ongelijkheid** zoals $f(x) \geq 4$.

Je kunt ook van beide functies de functiewaarden met elkaar vergelijken. Je krijgt dan

- een **vergelijking** zoals $f(x) = g(x)$, of
- een **ongelijkheid** zoals $f(x) \geq g(x)$.

Voor het oplossen van vergelijkingen heb je technieken als terugrekenen, de balansmethode, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen, de abc-formule, geleerd.



Figuur 4

Om een ongelijkheid op te lossen gebruik je vaak grafieken zoals die hiernaast. Je lost dan eerst de bijbehorende vergelijking op om te weten waar de functiewaarden gelijk zijn. Daarna kijk je naar de grafieken. Een schets van de grafieken is vaak wel voldoende en soms vermeld je alleen de vorm.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Twee functies vergelijken

Hiernaast zie je de grafieken van de functies f en g met $f(x) = x^3 - 4x$ en $g(x) = 3x^2$.

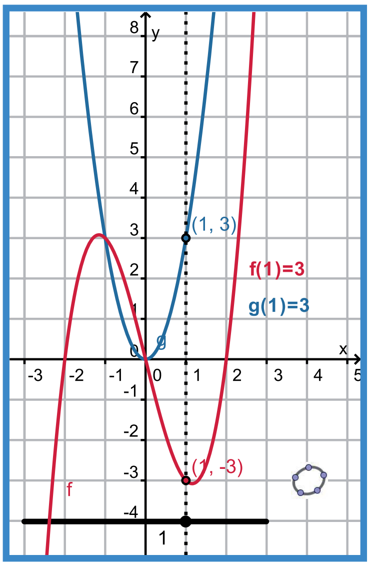
Los op: $f(x) \geq g(x)$.

Antwoord

Je lost eerst op: $f(x) = g(x)$.

$x^3 - 4x = 3x^2$ geeft na ontbinden in factoren $x(x-4)(x+1) = 0$.

Je vindt dus: $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 4$.
De eerste twee waarden van x vind je in de figuur terug, de derde niet. Maar dat komt alleen omdat de figuur niet ver genoeg zichtbaar is in de y-richting. Ga na, dat voor deze waarde beide functies dezelfde functiewaarde hebben.



Figuur 5

De oplossing van de ongelijkheid lees je uit de grafieken af. Je moet de x-waarden opschrijven waarbij de functiewaarde van f groter of gelijk is aan die van g. Ga ga dat dit zo is als: $-1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 4$.

Opgave 4

Bekijk de twee functies in **Voorbeeld 1**.

a Los zelf de vergelijking $\text{f}(x) = \text{g}(x)$ op.

b Hoe kun je controleren dat ook $x = 4$ een oplossing van de vergelijking is?

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $\text{f}(x) < \text{g}(x)$ op.

Opgave 5

Gegeven zijn de functies f en g door $\text{f}(x) = x^4$ en $\text{g}(x) = 8x^2$.

Je wilt de ongelijkheid $\text{f}(x) \leq \text{g}(x)$ oplossen.

a Los de vergelijking $\text{f}(x) = \text{g}(x)$ op.

b Maak een schets van de grafieken van beide functies in één figuur.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid $\text{f}(x) \leq \text{g}(x)$ op.

Opgave 6

Los de volgende ongelijkheden exact op.

a $x^3 \geq 6x - x^2$

b $0{,}5x + 2 < 5 - x^2$

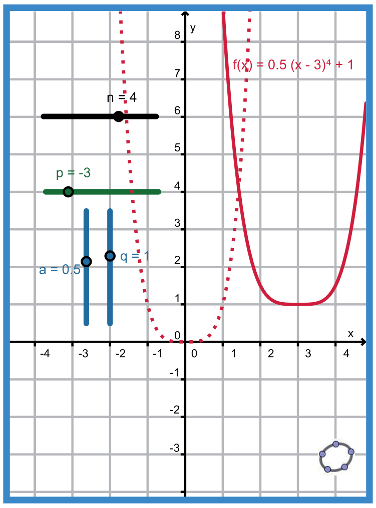
c $x^4 \geq 9x^2$

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Machtsfuncties

Hiernaast kun je de grafiek van de functie f met $\text{f}(x) = 0{,}5(x-3)^4 + 1$ zien ontstaan uit die van $y = x^4$.

Los op: $\text{f}(x) \geq 5$.



Figuur 6

Antwoord

Je lost eerst op: $\text{f}(x) = 5$.

$0{,}5(x-3)^4 + 1 = 5$ geeft $(x-3)^4 = 8$ en dus $x = 3 \pm \sqrt[4]{8}$.

De oplossing van de ongelijkheid lees je uit de grafiek af. Je moet de x-waarden opschrijven waarbij de functiewaarde van f groter of gelijk aan 5 is. Ga ga dat dit zo is als: $x \leq 3 - \sqrt[4]{8} \vee x \geq 3 + \sqrt[4]{8}$.

Opgave 7

Bekijk de functie in **Voorbeeld 2**.

a Los zelf de vergelijking $\text{f}(x) = 5$ op.

b Geef nu de oplossing van de ongelijkheid in twee decimalen nauwkeurig. (Let goed op de afrondingen!)

c Los de ongelijkheid $\text{f}(x) < 3$ eerst exact op en daarna in twee decimalen nauwkeurig.

d Hoeveel oplossingen heeft de ongelijkheid $\text{f}(x) < 1$?

e Hoeveel oplossingen heeft de ongelijkheid $\text{f}(x) \leq 1$?

f Hoeveel oplossingen heeft de ongelijkheid $\text{f}(x) \geq 1$?

Opgave 8

Bekijk de functie g met $g(x) = 0{,}25(x-2)^3 + 3$.

a Hoe kan deze grafiek door transformatie uit de grafiek van $y = x^3$ ontstaan?

b Los exact op: $g(x) \leq 5$.

Opgave 9

Gegeven zijn de functies f en g door $f(x) = (x+1)^4$ en $g(x) = (2-x)^4$.

a Maak een schets van beide grafieken in één figuur.

b Los exact op: $f(x) \leq g(x)$.

Voorbeeld 3

Los op: $\sqrt{x} < 2$.

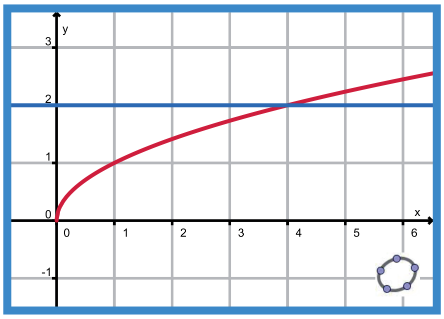
Antwoord

Je vergelijkt de functiewaarden van $f(x) = \sqrt{x}$ met die van $g(x) = 2$. Je hebt daarom beide grafieken nodig. Let op het domein van de wortelfunctie!

Los eerst op: $f(x) = g(x)$.

Een wortel werk je weg door kwadrateren, dus $\sqrt{x} = 2$ geeft $x = 2^2$ en dus $x = 4$.

De oplossing van de ongelijkheid lees je uit de grafiek af. Je moet de x-waarden opschrijven waarbij de functiewaarde van f kleiner of gelijk aan die van g is. Ga ga dat dit zo is als: $0 \leq x < 4$.



Figuur 7

Opgave 10

Bekijk de ongelijkheid in **Voorbeeld 3**. Er worden twee functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = 2$ vergeleken.

a Wat is het domein van functie f? En waarom?

b Leg uit waarom de oplossing van de ongelijkheid $0 \leq x < 4$ is.

c Los nu zelf op $\sqrt{x} \leq 3$.

Opgave 11

Je wilt de ongelijkheid $6 - \sqrt{x-3} > 4$ oplossen.
Daartoe gebruik je de grafiek van $f(x) = 6 - \sqrt{x-3}$.

a Teken eerst de grafiek van f. Bedenk hoe hij kan ontstaan uit een standaardfunctie.

b Los de vergelijking $6 - \sqrt{x-3} = 4$ op.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid op.

Opgave 12

Je wilt de ongelijkheid $\frac{6}{x-3} + 2 \geq 4$ oplossen.
Daartoe gebruik je de grafiek van $g(x) = \frac{6}{x-3} + 2$.

a Teken eerst de grafiek van g. Bedenk hoe hij kan ontstaan uit een standaardfunctie.

b Los de vergelijking $\frac{6}{x-3} + 2 = 4$ op.

c Schrijf de oplossing van de ongelijkheid op.

Verwerken

Opgave 13

Voor de inhoud V van een bol met straal r geldt $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Voor de oppervlakte A van zo'n bol geldt $A(r) = 4\pi r^2$.

a Voor welke waarden van r is $A(r) > 100$?

b Voor welke waarden van r is $V(r) > 100$?

c Voor welke waarden van r geldt $V(r) < A(r)$?

Opgave 14

Los de volgende ongelijkheden op.

a $4 - x^2 > 2 - x$

b $x^3 < 9x$

c $x^3 < 9x^2$

d $x^3 - 6x^2 + 9x > 0$

Opgave 15

Gegeven is de functie f met $\text{f}(x) = \text{-}0{,}1(x-3)^4 + 62{,}5$.

a Bereken f(0).

b De grafiek van f kan door transformatie ontstaan uit die van een standaardfunctie. Welke standaardfuncties is dat en welke transformaties moeten er worden toegepast?

c Los op: $\text{f}(x) \geq 0$.

Opgave 16

Gegeven zijn de functies f en g door $\text{f}(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$ en $\text{g}(x) = \text{-}x^2$.

a Los op: $\text{f}(x) = 0$.

b Teken de grafieken van f en g in één figuur.

c Los op: $\text{f}(x) < \text{g}(x)$.

Opgave 17

Los de volgende ongelijkheden op.

a $2\sqrt{x} < 6$

b $3\sqrt{x-2} + 1 > 7$

c $\frac{3}{2x} \leq 1$

d $\frac{3}{x-2} + 1 \geq 1{,}5$

Toepassen

De tijd die een slinger van een wandklok nodig heeft om één keer heen en weer te bewegen heet de **slingertijd**. De formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ geeft het verband aan tussen de slingertijd T in seconde en de lengte L van de slinger van een bepaalde wandklok in m. Het getal g heeft te maken met de zwaartekracht en in $g \approx 9{,}8$.

Omdat de slinger van deze klok in 1 seconde heen en weer slingert, kun je de lengte van de slinger van deze klok berekenen. Je moet daarvoor een vergelijking oplossen.

Figuur 8

Opgave 18: Slinger en slingertijd

Je ziet in **Toepassen** een formule voor het berekenen van de slingertijd van de slinger van een wandklok.

a Een klok heeft een slinger met een lengte van 40 cm. Hoe groot is de slingertijd?

b Wordt de slingertijd van de klok tweemaal zo groot als de lengte van de slinger twee maal zo groot wordt? Licht je antwoord toe.

Opgave 19: Lengte slinger

In **Toepassen** staat dat je lengte van de slinger kunt uitrekenen door een vergelijking op te lossen.

a Welke vergelijking is dat?

b Los deze vergelijking op. Geef de juiste waarde van L in mm nauwkeurig.

Testen

Opgave 20

Gegeven is de functie f door $\mathrm{f}(x) = 0{,}5(x-3)^4 - 8$.

a Voor welke waarden van x geldt $\mathrm{f}(x) = 32{,}5$?

b Voor welke waarden van x geldt $\mathrm{f}(x) > 32{,}5$?

Opgave 21

Los de volgende ongelijkheden op.

a $x^4 < 4x^2$

b $3\sqrt{x-2} < 15$

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.