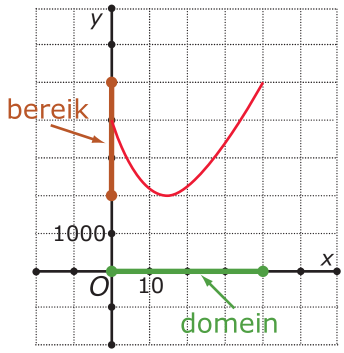
4.2 Domein en bereik

Inleiding

Soms kun je bij functies niet zonder meer alle mogelijke waarden invoeren.
Je moet je dan beperken tot invoerwaarden binnen een bepaald domein. Zo'n domein moet je op een bepaalde manier noteren.

Iets vergelijkbaar geldt voor de functiewaarden (uitkomsten): vaak zijn niet alle uitkomsten mogelijk. Je blijft dan binnen een bepaald bereik. Voor zo'n bereik gebruik je notatie die je ook voor het domein hebt.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat het domein en wat het bereik van een functie is;
- hoe je domein en bereik van een functie kunt opschrijven.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met functies en grafieken en de bijbehorende notaties gebruiken;
- werken met lineaire, kwadratische en exponentiële functies.

Verkennen

Opgave V1

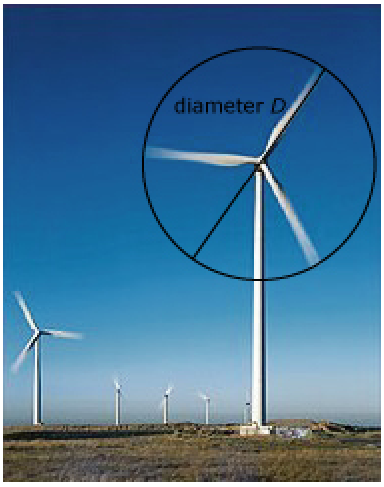
Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van zo’n windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windkracht en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kW (kiloWatt) per uur kan worden berekend met een formule zoals deze:

$P = 0{,}52 \cdot v^3$.

Hierin is v de windsnelheid in m/s en de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken is 20 m. Bij hoge windsnelheden slaan de turbines van deze windmolens af.

a Welke waarden denk je dat v kan aannemen?

b Schat welke vermogens een windmolen zoals deze kan leveren.



Figuur 2

Opgave V2

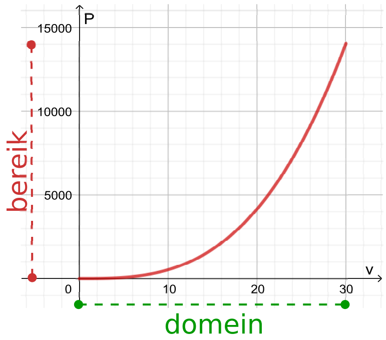
Gegeven is de functie f met $f(x) = \sqrt{x}$.

a Welke waarden denk je dat x kan aannemen?

b Maak een tabel en een grafiek bij deze functie.

c Welke functiewaarden heeft deze functie?

Uitleg



Figuur 3

Het vermogen van een windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windkracht en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kW (kiloWatt) per uur van molens met wieken van 10 m kan worden berekend met een functievoorschrift zoals dit:

$P(v) = 0{,}52v^3$

Hierin is v de windsnelheid in m/s.

Zo'n windmolen gaat draaien vanaf windkracht 2 tot 3 en wordt stilgezet boven windkracht 10 tot 12 (afhankelijk van het type) om overbelasting te voorkomen. Dus dergelijke windmolens functioneren alleen bij windsnelheden vanaf zo'n 3 m/s tot en met zo'n 30 m/s. Dat betekent dat v alleen waarden vanaf 0 tot en met 30 kan aannemen. Deze waarden vormen het 'domein' van de functie en je noteert het als interval $D_P = [0{,}30]$.

Vanwege het beperkte domein van de functie $P(v)$ zullen ook de uitkomsten beperkt zijn. Het interval waarbinnen alle uitkomsten liggen heet het 'bereik' van de functie. Ga na dat $B_P = [0; 14040]$.

Het domein heeft te maken met beperkingen van de invoervariabele en die kunnen worden ingegeven door de situatie, maar ook wel door de aard van de functie: de wortel uit een negatief getal heeft geen reële waarde en delen door 0 kan niet, enzovoorts.

Opgave 1

In de **Uitleg** vind je de functie die het vermogen van een windmolen met wieken van 10 m weergeeft. Nu bekijk je een windmolen met wieken van 15 m. Daarvoor geldt $P(v) = 1{,}17v^3$.

a Heeft het vergroten van de wieken invloed op het domein van de functie? Schrijf het domein van deze functie op als interval.

b Neem aan dat alle windsnelheden van 0 tot en met 25 m/s voor dit soort molens is toegestaan. Schrijf dan het domein en het bijbehorende bereik op.

Opgave 2

Gegeven is de functie f door $f(x) = 3 + \sqrt{x}$.

a Uit welke getallen bestaat het domein van deze functie? En waarom?

Het domein van deze functie wordt wel geschreven als $D_f = [0, \rightarrow \rangle$.

b Wat betekent de pijl? En waarom zou het rechterhaakje een andere vorm hebben gekregen als het linkerhaakje?

c Reken enkele functiewaarden uit, maak eventueel een tabel. Welke functiewaarden kunnen voorkomen?

d Schrijf het bereik van deze functie op. Gebruik dezelfde notatie als voor het domein.

Opgave 3

Figuur 4

Je ziet hier de baan van een kogel die door een kogelstoter zo ver mogelijk wordt weggestoten. De kogel komt 14 m ver. Het hoogste punt van de baan zit 4 m boven de grond. De baan van de kogel kan worden beschreven met de formule $h(x) = -0{,}0625(x-6)^2 + 4$ waarin h de hoogte van de kogel boven de grond is en x de afstand is die het punt op de grond recht onder de kogel heeft afgelegd vanaf het moment van loslaten.

a Laat zien, dat de kogel inderdaad 14 m ver komt.

b Schrijf het domein van functie $h(x)$ op als interval.

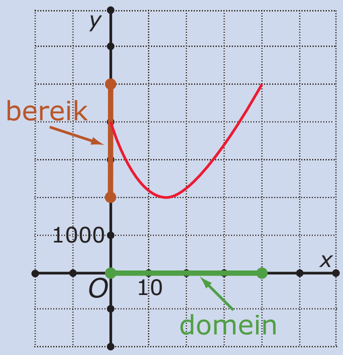
c Laat zien dat het hoogste punt van de baan inderdaad 4 m boven de grond zit.

d Schrijf het bereik van deze functie op als interval.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Je ziet hier de volledige grafiek van y als functie van x. Kennelijk zijn niet alle waarden voor x toegestaan. De toegestane waarden voor x zijn: $0 \leq x \leq 40$. Deze waarden vormen samen het **domein** D van de functie.
Je ziet dat ook niet alle uitkomsten mogelijk zijn. De mogelijke uitkomsten zijn: $2000 \leq x \leq 5000$. Deze waarden vormen samen het **bereik** B van de functie.



Figuur 5

Je schrijft zo'n domein of bereik vaak als **interval**, dat is een gedeelte van een getallenlijn. Het domein is een gedeelte van de x-as, het bereik is een deel van de y-as.
Als je alle getallen van de getallenlijn bedoelt, dan heb je het in de wiskunde over alle reële getallen. Samen vormen die de verzameling $\mathbb{R}$. Elk interval is een gedeelte van $\mathbb{R}$. Als je een interval opschrijft geef je de beginwaarde en de eindwaarde weer tussen haken.

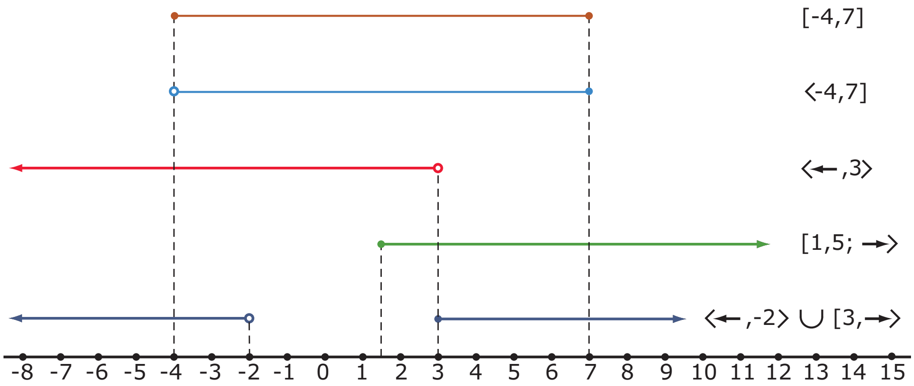
De vorm van de haken bepaalt of de beginwaarde en de eindwaarde nog bij het interval horen. Hier is:

D = [0,40] en B = [2000,5000].

In een tekening gebruik je open of gesloten rondjes om de grenzen van het interval aan te geven: een gesloten rondje als de beginwaarde (of de eindwaarde) erbij hoort.

Voorbeeld 1

Als je alle getallen van de getallenlijn bedoelt, dan heb je het in de wiskunde over alle reële getallen. Samen vormen die de verzameling $\mathbb{R}$. Elk interval is een gedeelte van $\mathbb{R}$. Als je een interval opschrijft geef je de beginwaarde en de eindwaarde weer tussen haken. De vorm van de haken bepaalt of de beginwaarde en de eindwaarde nog bij het interval horen. Bij het opschrijven van het domein en/of het bereik van een functie gebruik je deze intervalnotatie. Hier zie je een aantal intervallen getekend met de juiste notatie er naast.



Figuur 6

In de onderste figuur zie je dat het teken $\cup$ wordt gebruikt om aan te geven dat je alle getallen van twee (of meer) afzonderlijke intervallen samen bedoelt.

Opgave 4

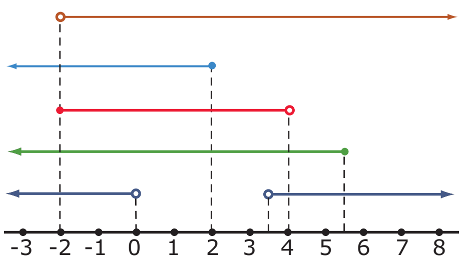
Bekijk de intervallen in **Voorbeeld 1**. Let goed op de open en gesloten rondjes en op de bijpassende vorm van de haakjes.

Teken de intervallen $\langle -2{,}4]$, $[2, \rightarrow \rangle$, $[1; 3{,}5]$, $\langle \leftarrow ,0]$ en $\langle \leftarrow ,4\rangle \cup \langle 6, \rightarrow \rangle$.

Opgave 5

Hier zie je een aantal intervallen getekend.

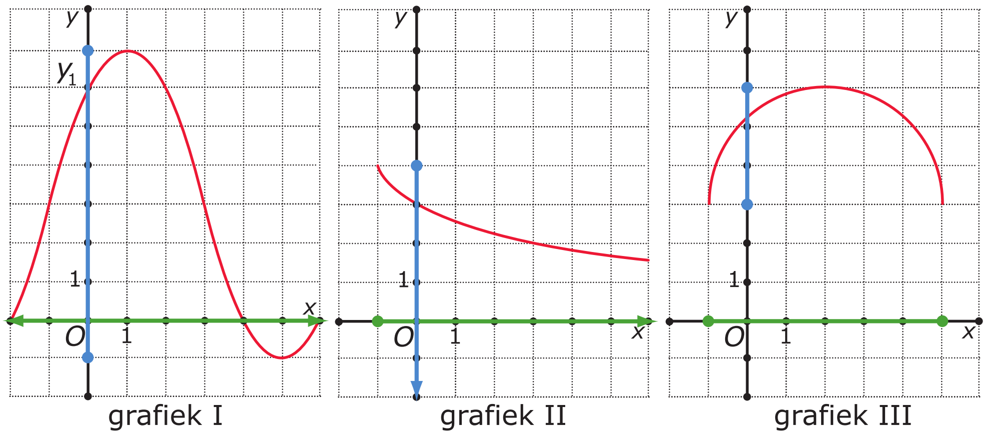
Schrijf ze in intervalnotatie.



Figuur 7

Opgave 6

Hier zie je een aantal grafieken van functies. Het domein en het bereik van de functie is bij de grafiek aangegeven.



Figuur 8

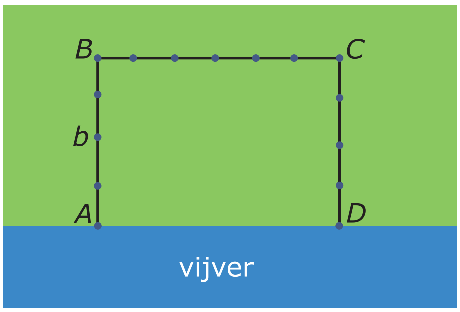
Schrijf domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

Voorbeeld 2

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie figuur hieronder. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB. Door b te veranderen kun je de oppervlakte veranderen.

Bekijk de applet: weiland tegen vijver

De oppervlakte l van het landje is een functie van de breedte b. Bepaal het domein en het bereik van deze functie.



Figuur 9

Antwoord

Noem de lengte van het weiland l, dan is $l = 100 - 2b$.

Nu kan l alleen waarden van 0 tot 100 hebben, meer hekwerk is er niet. En dus moet b tussen de waarden 0 en 50 zitten.

Het domein van deze functie is $D = \langle 0,50 \rangle$ en het bereik is $B = \langle 0,100 \rangle$.

Opgave 7

In **Voorbeeld 2** is de lengte l van een rechthoek een functie van de breedte b.

a Leg uit hoe je aan het functievoorschrift komt.

b De oppervlakte A van dit landje is ook een functie van de breedte. Welk functievoorschrift hoort daar bij?

c Bepaal domein en bereik van $A(b)$.

Voorbeeld 3

Bepaal domein en bereik van de functie f met voorschrift $f(x) = -0{,}5(x-3)^2 + 6$.

Antwoord

De grafiek van f is een bergparabool met top $T(3,6)$.

Er is geen enkele beperking voor de waarden die x kan aannemen, dus het domein is $D_f = \mathbb{R}$.

Er is een maximum van 6, dus de functiewaarden kunnen maximaal 6 zijn.
Het bereik van de functie is $B_f = \langle \leftarrow; 6]$.

Opgave 8

Gegeven is de functie $y = -0{,}25x^2 + 20x$.

a Hoe ziet de grafiek van $y(x)$ er uit?

b Schrijf het domein van $y(x)$ op.

c Bepaal de extreme waarde van deze functie en schrijf het bereik op.

Opgave 9

Gegeven is de functie $\text{g}(x) = 3 - \sqrt{x}$.

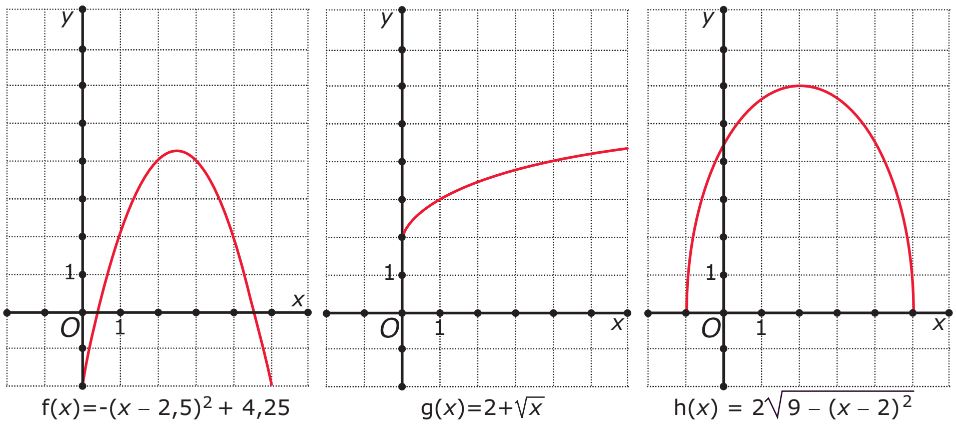
a Teken de grafiek van g.

b Schrijf het domein van g op.

c Schrijf het bereik van g op.

Opgave 10

Hier zie je een aantal grafieken van functies. De functievoorschriften zijn er bij gezet.



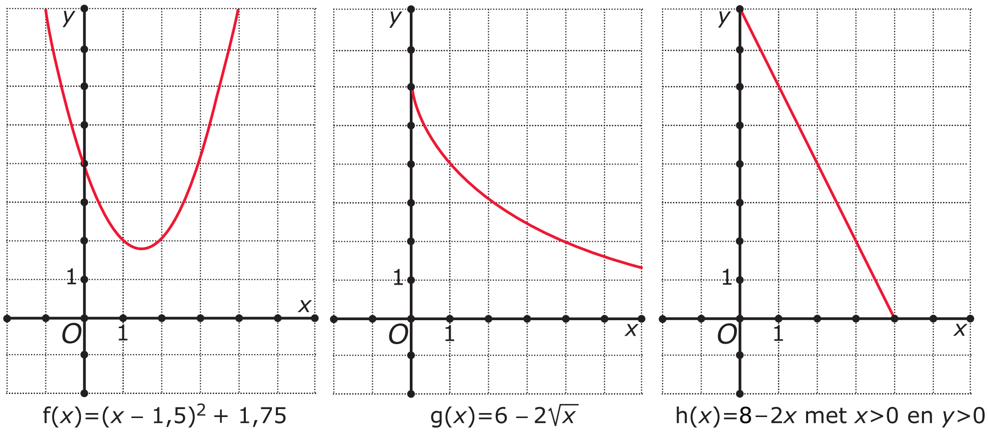
Figuur 10

Schrijf domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

Verwerken

Opgave 11

Hier zie je een aantal grafieken van functies. De functievoorschriften zijn er bij gezet.



Figuur 11

Schrijf domein en bereik van elk van deze functies in intervalnotatie.

Opgave 12

Twee kaarsen worden op hetzelfde moment ($t = 0$) aangestoken.
Kaars 1 brandt gelijkmatig op: h_1 is een lineaire functie van t met $h_1(0) = 25$ en $h_1(20) = 0$.
Kaars 2 brandt niet gelijkmatig op: $h_2 = \frac{1}{12}(t - 19)^2 - \frac{1}{12}$.
Hierin is h in cm en t in uren.

a Stel een functievoorschrift $h_1(t)$ op voor het opbranden van de eerste kaars.

b Bepaal domein en bereik van h_1.

c Bepaal domein en bereik van h_2.

d Hoe lang is kaars 2 langer dan kaars 1?

Opgave 13

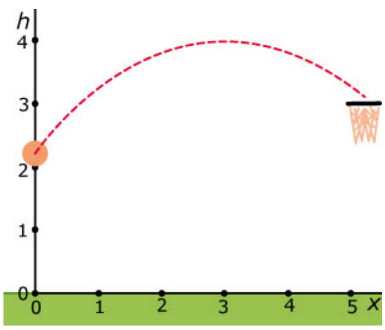
Een basketballer gooit de bal precies in de basket. De baan van het middelpunt van de bal is (bij benadering) een deel van een parabool. Je ziet dit deel van de parabool in de figuur hiernaast in een assenstelsel. Zowel x als h zijn in m uitgedrukt. Bij die parabool hoort de formule $h = \text{-}0{,}2 \cdot (x - 3)^2 + 4$.

a Op het moment dat de speler de bal loslaat is $x = 0$. Op welke hoogte wordt de bal losgelaten? Het gaat daarbij om het middelpunt van de bal.

b Welk punt is het hoogste punt van de parabool?

c Op hoeveel m voor de basket laat deze speler de bal los?

d Bepaal domein en bereik van $h(x)$.



Figuur 12

Opgave 14

In 2012 hanteerde PostNL de volgende tarieven voor het versturen van brieven tot 500 gram binnen Nederland:

- tot en met 20 gram: € 0,54
- tot en met 50 gram: € 1,08
- tot en met 100 gram: € 1,62
- tot en met 250 gram: € 2,16
- tot en met 500 gram: € 2,70

De prijs T (in €) is een functie van het gewicht g (in g) van een brief.

a Wat is het domein van $T(g)$?

b Wat is het bereik van $T(g)$?

Opgave 15

Het bereik van een functie hangt af van het gekozen domein.

a Bepaal het bereik van de functie f met $\text{f}(x) = 6 - 1{,}5x$ en domein $\langle 0{,}6]$.

b Bepaal het bereik van de functie g met $\text{g}(x) = (x - 3)^2 + 1$ en domein $\langle 0{,}6]$.

Opgave 16

Van een rechthoekige driehoek is de hypotenusa 10 cm.

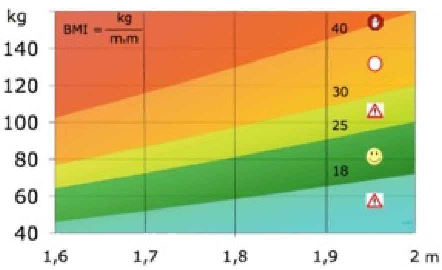
Welke waarden kan de oppervlakte aannemen?

Toepassen

Of iemand leidt aan overgewicht kun je bepalen aan de hand van de **body mass index**, de BMI. Een andere naam hiervoor is de **Queteletindex**. De grafiek hiernaast geeft weer bij welke BMI er sprake is van overgewicht. Hij geldt voor volwassenen.
Je BMI kun je eenvoudig uitrekenen door je gewicht in kg te delen door het kwadraat van je lengte in m.

Als je de BMI voorstelt door Q, je gewicht door g en je lengte door l, dan vind je

$Q = \frac{g}{l^2}$



Figuur 13

Bij mensen van een bepaalde vaste lengte hangt de BMI alleen van het gewicht af. Dan is Q een functie van g. Bij mensen van een bepaald gewicht hangt de BMI alleen van de lengte af. Dan is Q een functie van l.

Opgave 17: BMI en gewicht

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een lengte heeft van 1,70 m.

a De BMI is nu een functie van het gewicht g. Stel een formule op voor Q als functie van g.

b Lees uit de figuur het bereik van Q af voor mensen van deze lengte met een gezond gewicht.

c Bereken het domein van deze functie voor mensen met een gezond gewicht. Rond je antwoord af op gehele kg. Wat betekent dit antwoord?

Opgave 18: BMI en lengte

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een gewicht heeft van 80 kg.

a De BMI is nu een functie van de lengte l. Stel een formule op voor Q als functie van l.

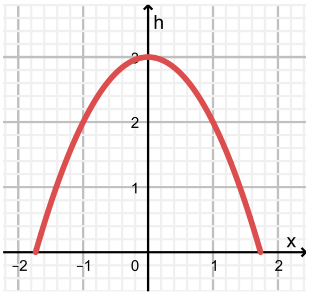
b Lees uit de figuur het bereik van Q af voor mensen met matig overgewicht.

c Bereken het domein van deze functie voor mensen met een licht overgewicht. Rond je antwoord af op gehele cm. Wat betekent dit antwoord?

Testen

Opgave 19

Onder andere in de architectuur van de Amsterdamse School komen deuropeningen voor die de vorm van een parabool hebben. Bijvoorbeeld geldt voor de deuropening hiernaast $h(x) = 3 - x^2$.
De deur zelf is 1 m breed en 2,10 hoog en zit precies in het midden van deze deuropening.



Figuur 14

a Bereken het domein van deze functie h.

b Schrijf ook het bereik van deze functie op.

c Bereken hoe groot het horizontale lijnstuk tussen de randen van de deuropening is ter hoogte van de bovenkant van de deur in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 20

Gegeven is de functie f met $f(x) = 6 + (x - 2)^2$ met domein $[0, \rightarrow\rangle$.

Bepaal het bereik van deze functie.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.