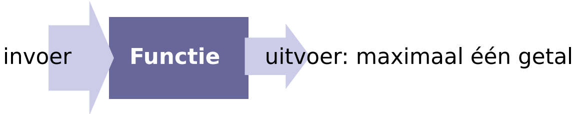
4.1 Wat is een functie?

Inleiding

Er zijn formules waarbij je duidelijk verschil maakt tussen de variabele waarvoor je getallen invoert (meestal x) en de variabele die aangeeft wat de bijbehorende uitkomst is (meestal y). Als er dan niet meer dan één uitkomst is, spreek je van een functie.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een functie is en functies herkennen aan formules en grafieken;
- de begrippen onafhankelijk variabele (of ‘origineel’) en functiewaarde (of ‘uitkomst’);
- grafieken tekenen bij functies.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- werken met lineaire, kwadratische en exponentiële functies.

Verkennen

Opgave V1

Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van zo’n windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windkracht en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kW (kiloWatt) per uur kan worden berekend met een formule zoals deze:

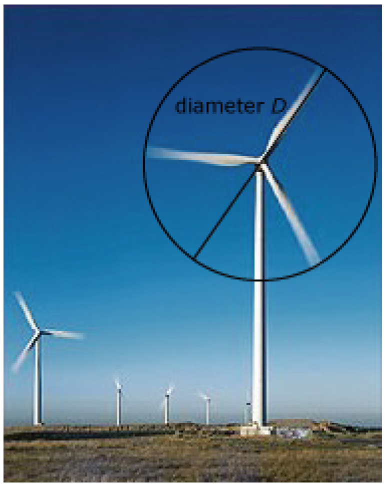
$P = 0{,}0013 \cdot v^3 \cdot D^2$

Hierin is v de windsnelheid in m/s en D de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken in m.

a De windmolen op de foto heeft wieken van 10 m. Laat zien dat voor die windmolen geldt: $P = 0{,}520 \cdot v^3$.

b Welk vermogen levert zo'n windmolen per uur als de windsnelheid 10 m/s is? Zijn er meerdere antwoorden mogelijk op deze vraag?

c Bij welke windsnelheid levert deze windmolen een vermogen van 400 kW/uur? Zijn er meerdere antwoorden mogelijk op deze vraag?



Figuur 2

Uitleg

Iedere Nederlander kent ze: de windmolens die elektrische energie opwekken. Het vermogen van zo’n windmolen hangt af van de grootte van zijn wieken, van de windkracht en van de bouw van de molen. Dat vermogen P in kW (kiloWatt) per uur kan worden berekend met een formule zoals deze:

$P = 0{,}0013 \cdot v^3 \cdot D^2$

Hierin is v de windsnelheid in m/s en D de diameter van de cirkel die de ronddraaiende wieken maken in m.

Van een bepaald type windmolen is de lengte van de wieken bekend, en dan kun je voor D een waarde invullen. Bijvoorbeeld als de wieken 10 m lang zijn, krijg je $P = 0{,}520 \cdot v^3$.
Je zegt wel dat P een ‘functie’ is van v.
Je schrijft dan de formule vaak als functievoorschrift $P(v) = 0{,}52v^3$. De v tussen haakjes geeft aan dat P afhankelijk is van v, een functie is van v. Je zegt dat v de onafhankelijk variabele is.

Met $P(10)$ bedoel je dan de waarde van P (het vermogen) bij $v = 10$. Hier geldt $P(10) = 520$. Ga dat na. Je zegt dat $P(10)$ de functiewaarde is bij het origineel $v = 10$.

$P(v)$ heeft voor elke waarde van v precies één uitkomst, nooit meer dan één. Bij een functie heeft elk origineel precies één functiewaarde.

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** de functie die het vermogen van een windmolen met wieken van 10 m weergeeft.

a Hoe groot is $P(15)$? Wat betekent dit getal?

b Waarom kun je in de uitdrukking $P(15)$ hier niet gewoon de haakjes uitwerken en er $15P$ van maken?

c Schrijf de functiewaarde bij $v = 20$ met haakjes op en bereken die waarde.

d Teken de grafiek van $P(v)$ waarbij je voor v waarden neemt vanaf 0 tot en met 30.

e Hoe zie je aan de grafiek dat er bij elk origineel precies één functiewaarde hoort?

Opgave 2

Gegeven is de formule $y^2 = 4x$.

a Neem $x = 1$ en bereken welke waarden van y hierbij horen.

Bij deze formule is y geen functie van x, want bij de meeste waarden van x horen twee y-waarden.

b Kun je de formule in de vorm $y = ...$ schrijven?

c Maak een grafiek bij deze formule.

d Hoe kun je aan de grafiek zien dat het niet de grafiek van een functie is?

Theorie en voorbeelden

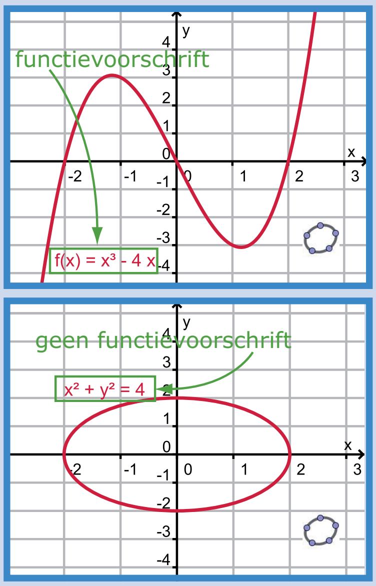
Om te onthouden

Als bij een verband tussen twee variabelen x en y bij elke waarde van x niet meer dan één waarde voor y hoort, zeg je dat y een **functie** is van x.

Je schrijft de bijbehorende formule in de vorm $y = \text{f}(x)$, waarin f de afkorting van 'functie' is. Als je met meerdere functies te maken hebt gebruik je ook letters als g, h, ...
x heet de **onafhankelijk variabele**, y hangt af van x. Een getal dat je voor x kiest noem je het **origineel**.
Het getal dat je voor x kiest vul je in het **functievoorschrift** $\text{f}(x)$ in. De bijbehorende uitkomst heet de **functiewaarde**, de waarde van y.

Soms worden functies ook wel geschreven als $y(x) = ...$ en krijgt de functie zelf geen naam of afkorting. En vaak wordt alleen maar $y = ...$ gebruikt als in de uitdrukking rechts van het isgelijkteken maar één variabele voorkomt.

Niet elke grafiek is de grafiek van een functie. Bij een functie hoort bij een origineel nooit meer dan één functiewaarde. In de grafiek kunnen er dus nooit punten recht boven elkaar liggen!



Figuur 3

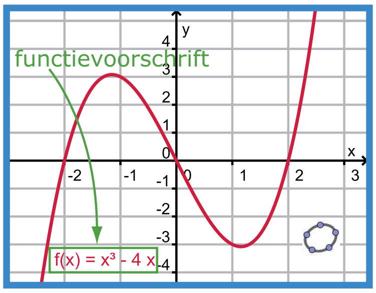
Voorbeeld 1

Hier zie je de grafiek van de functie f met het functievoorschrift $f(x) = x^3 - 4x$.

Reken na, dat f(1) = -3.
De grafiek van f gaat daarom door (1,-3).

Je zegt wel dat -3 de functiewaarde van het origineel 1 (ofwel van $x = 1$) is.

In plaats van het functievoorschrift schrijf je ook wel de formule $y = x^3 - 4x$. Of ook wel $y(x) = x^3 - 4x$. In de praktijk worden deze verschillende manieren van functies noteren door elkaar gebruikt.



Figuur 4

Let vooral ook goed op de betekenis van de haakjes. Voor deze functie f geldt ook het functievoorschrift $f(x) = x(x^2 - 4)$. De haakjes links en rechts van het isgelijkteken hebben een totaal verschillende betekenis!

Opgave 3

Bekijk de functie die in **Voorbeeld 1** is gegeven.

a Reken na, dat f(1) = -3.

b Bereken ook de functiewaarde bij $x = 3$.

c Waarom kan het functievoorschrift worden geschreven als $f(x) = x(x^2 - 4)$?

d Bekijk het functievoorschrift bij c. Welke verschillende betekenis hebben de haakjes links en rechts van het isgelijkteken?

Opgave 4

Gegeven zijn de formules $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$ en $y = 3 - 2{,}5x$. Beide formules beschrijven een functie, de eerste formule beschrijft functie f en de tweede functie g.

a Schrijf de bijbehorende functievoorschriften op.

b Bereken f(3) en g(3).

c Los op: $f(x) = 4$. Welke punten van de grafiek van f vind je hiermee?

d Wat betekent $f(x) = g(x)$ voor de grafieken van beide functies? Los deze vergelijking op.

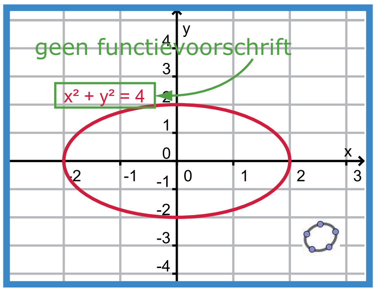
Voorbeeld 2

Hier zie je de grafiek bij de formule $x^2 + y^2 = 4$.

Reken na, dat bij $x = 1$ twee y-waarden horen.
Je ziet dat ook aan de grafiek. Op de lijn $x = 1$ liggen twee punten van de grafiek.

Reken na, dat bij $y = 1$ twee x-waarden horen.
Je ziet dat ook aan de grafiek. Op de lijn $y = 1$ liggen twee punten van de grafiek.

Dit is niet de grafiek van een functie.
y is geen functie van x. En x is ook geen functie van y.



Figuur 5

Opgave 5

Bekijk de grafiek en de bijbehorende formule die in **Voorbeeld 2** zijn gegeven.

a Welke waarden van y horen er bij $x = 1$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

b Welke waarden van y horen er bij $x = 0$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

c Welke waarden van x horen er bij $y = 1$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

d Welke waarden van x horen er bij $y = -1$? Welke punten van de grafiek vind je daarmee?

e Waarom is y geen functie van x?

f Waarom is x geen functie van y?

Opgave 6

Bij de formule $p^2 = 2q$ is p geen functie van q.

a Laat dat met een getallenvoorbeeld zien.

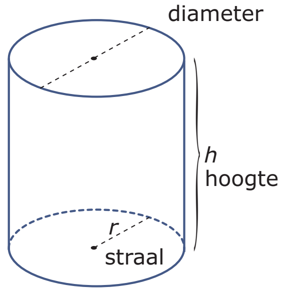
b Schrijf de formule in de vorm $q = ...$

c Waarom is q wel een functie van p?

Voorbeeld 3

Voor de inhoud I van een cilinder geldt $I = \pi r^2 h$ waarin r de straal en h de hoogte van de cilinder is, beide in cm.

Ga uit van een cilinder met een hoogte van 10 cm. Schrijf het voorschrift op van I als functie van r en los op $I(r) = 1000$.



Figuur 6

Antwoord

Als je $h = 10$ invult in de gegeven formule vind je I als functie van r: $I = 10\pi r^2$.

$10\pi r^2 = 1000$ geeft $r^2 = \frac{100}{\pi}$ en dus $r = \pm\sqrt{\frac{100}{\pi}}$.

Omdat r een positief getal moet zijn is er precies één waarde van r die voldoet: $r = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \approx 5{,}6$ cm.

Opgave 7

Bekijk de formule voor de inhoud van een cilinder in **Voorbeeld 3**. Neem nu een blik waarvan de diameter 10 cm is.

a Geef het functievoorschrift van I als functie van h.

b Bereken $I(10)$.

c Los op $I(h) = 1000$. Geef de waarde van h in mm nauwkeurig.

Opgave 8

Voor de oppervlakte A van een cilinder geldt $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ waarin r de straal en h de hoogte van de cilinder is, beide in cm.

Ga eerst uit van een cilinder met een hoogte van 10 cm.

a Schrijf het voorschrift op van A als functie van r.

b Bereken $A(5)$. Wat betekent de uitkomst?

Ga vervolgens uit van een cilinder met een straal van 10 cm.

c Schrijf het voorschrift op van A als functie van h.

d Bereken $A(5)$. Wat betekent de uitkomst?

Verwerken

Opgave 9

Gegeven is de functie f met functievoorschrift $\text{f}(x) = x^2 + 2x - 6$.

a Bereken f(0) en f(-2).

b Welke vorm heeft de grafiek van deze functie? Heeft deze functie een maximum of een minimum?

c Bereken de nulpunten van de grafiek.

d Voor welke waarden van x is de functiewaarde gelijk aan 9?

Opgave 10

In 2012 hanteerde PostNL de volgende tarieven voor het versturen van brieven tot 500 gram binnen Nederland:

- tot en met 20 gram: € 0,54
- tot en met 50 gram: € 1,08
- tot en met 100 gram: € 1,62
- tot en met 250 gram: € 2,16
- tot en met 500 gram: € 2,70

Noem het gewicht van een brief g en de prijs T.

a Teken een grafiek van $T(g)$.

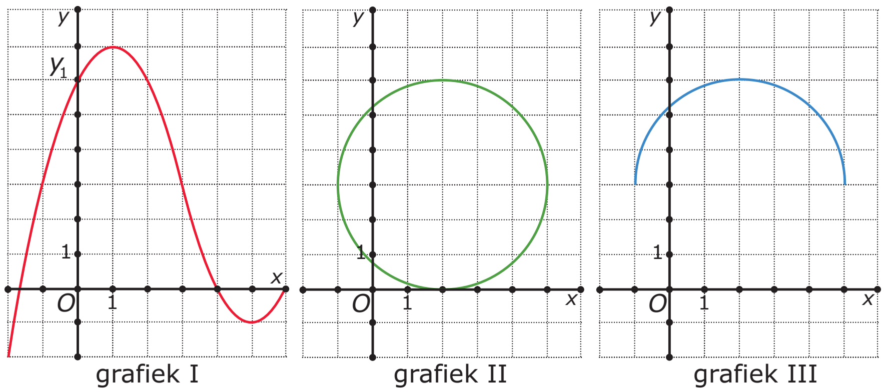
b Hoeveel bedraagt $T(100)$?

c Waarom is T een functie van g?

d Waarom is g geen functie van T?

Opgave 11

Bij welke van deze grafieken is y geen functie van x?



Figuur 7

Opgave 12

Gegeven zijn de functies f en g door hun functievoorschriften:

- $\text{f}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$
- $\text{g}(x) = -x$

a De grafiek van f is een parabool met top T. Bereken de coördinaten van T.

b Bereken de exacte snijpunten van de grafiek van f met de assen. Teken de grafiek van f en g in één figuur.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de snijpunten van beide grafieken.

Opgave 13

Van een balk is het grondvlak een vierkant met zijden van x cm en is de hoogte h cm.

Neem eerst aan dat $h = 20$ cm.

a Geef een formule voor de totale oppervlakte A van deze balk als functie van x.

b Bereken $A(5)$.

c Los op $A(x) = 300$. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

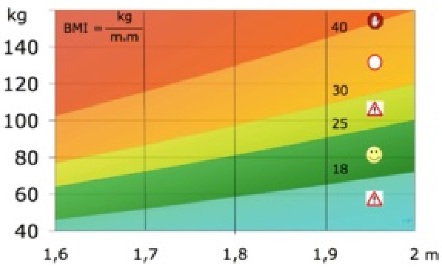
Ga er nu van uit dat $x = 0{,}5h$ en dat h kan variëren.

d Geef het functievoorschrift van $A(h)$.

e Los op $A(h) = 300$. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Toepassen

Of iemand leidt aan overgewicht kun je bepalen aan de hand van de **body mass index**, de BMI. Een andere naam hiervoor is de **Queteletindex**. De grafiek hiernaast geeft weer bij welke BMI er sprake is van overgewicht. Hij geldt voor volwassenen.
Je BMI kun je eenvoudig uitrekenen door je gewicht in kg te delen door het kwadraat van je lengte in m.



Figuur 8

Als je de BMI voorstelt door Q, je gewicht door g en je lengte door l, dan vind je

$Q = \frac{g}{l^2}$

Bij mensen van een bepaalde lengte hangt de BMI alleen van het gewicht af. Dan is Q een functie van g. Bij mensen van een bepaald gewicht hangt de BMI alleen van de lengte af. Dan is Q een functie van l.

Opgave 14: BMI en gewicht

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een lengte heeft van 1,80 m.

a De BMI is nu een functie van het gewicht g. Stel een formule op voor Q als functie van g.

b Bereken $Q(80)$. Welke betekenis heeft de uitkomst?

c Bereken bij welke waarde van g iemand met een lengte van 1,80 m lijdt aan zeer ernstig overgewicht (rood in de grafiek). Welke betekenis heeft de uitkomst?

Opgave 15: BMI en lengte

Je ziet in **Toepassen** wat je verstaat onder de BMI. Ook tref je een formule aan voor het berekenen van de BMI.

Bekijk de groep mensen die een gewicht heeft van 100 kg.

a De BMI is nu een functie van de lengte l. Stel een formule op voor Q als functie van l.

b Bereken $Q(1{,}80)$. Welke betekenis heeft de uitkomst?

c Bereken bij welke waarde van l iemand met een gewicht van 100 kg lijdt aan zeer ernstig overgewicht. Welke betekenis heeft de uitkomst?

Testen

Opgave 16

Gegeven is de functie f met voorschrift $\text{f}(x) = 4 - x^2$.

a Bereken $\text{f}(0)$, $\text{f}(1)$ en $\text{f}(-3)$.

b Welke vorm heeft de grafiek van f? Is er van een maximum of een minimum sprake?

c Bereken de nulpunten van f.

Voor de functie g geldt $\text{g}(x) = 2x + 1$.

d Bereken de snijpunten van de grafieken van f en g.

Opgave 17

Bij welke van de volgende formules kun je y schrijven als een functie van x?

a $2x + 3y = 6$.

b $x^2 + 3y = 6$.

c $2x + y^2 = 6$.

d $x^2 + y^2 = 6$.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.