3.3 Exponentiële functies

Inleiding

Bij exponentiële groei horen exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x$. De waarden van deze functies variëren van heel dicht bij 0 tot oneindig groot. Om 0 te naderen moet je als $g > 1$ dan wel negatieve x-waarden toelaten.
De grafieken van deze exponentiële functies komen aan één kant steeds dichter bij de x-as, de horizontale asymptoot.
In dit onderdeel bekijk je exponentiële functies van de vorm $y = b \cdot g^x + a$.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de belangrijkste karakteristieken van exponentiële functies herkennen;
- de formule van een exponentiële functie opstellen vanuit twee gegeven punten.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- het begrip exponentiële groei/verval met de bijbehorende groeifactor en groei/vervalpercentage;
- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken met behulp van bijpassende formules en grafieken.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de grafiek van $y = 2^x$, ook voor negatieve waarden van x.

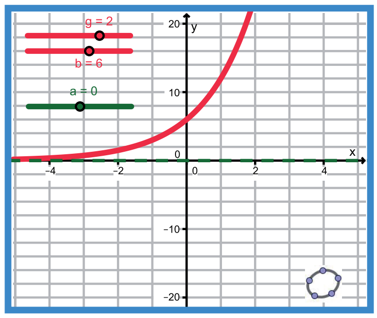
a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt?

b Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 afneemt?

c Hoeveel is 2^0? Kun je dat verklaren?

d Hoeveel is 2^{-1}?

e Krijg je ooit een uitkomst 0?



Figuur 2

Opgave V2

Tot nu toe heb je bij exponentiële functies weinig met mintekens te maken gehad. Toch kun je heel goed een grafiek maken van $y = -2^x$, ook voor negatieve waarden van x.

a Hoe ziet dit grafiek er uit?

Maar bekijk nu $y = (-2)^x$

b Vul nu de volgende tabel in:

x	0	1	2	3	4
y					

Tabel 1

c Kun je nu bij deze functie een zinvolle grafiek tekenen? Licht je antwoord toe.

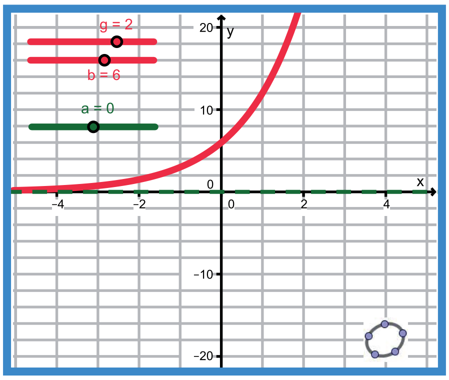
Uitleg

Bekijk de applet: exponentiële functie

Tot nu toe heb je exponentiële functies beschreven met formules van de vorm $y = b \cdot g^x$. Hierin kun je de beginhoeveelheid b en de groeifactor g variëren en zien wat er met de grafiek gebeurt. Maar je kunt ook de grafiek met a omhoog schuiven. Dan krijg je een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$.

Neem je $b = 6$ en $g = 2$. Kies ook $a = 0$. Bekijk de grafiek en je ziet dat de uitkomsten steeds dichter naar $y = 0$ naderen.

Neem je $a = 4$ dan zie je de grafiek van $y_4 = 6 \cdot 2^x + 4$. Deze grafiek heeft dezelfde vorm, maar nu naderen de uitkomsten steeds dichter naar $y = 4$.



Figuur 3

En zo kun je a variëren. De uitkomsten van $y = b \cdot g^x + a$ zullen steeds naderen naar de horizontale lijn $y = a$. Deze lijn heet daarom de horizontale asymptoot van de functie. Het woord ‘asymptoot’ is afgeleid uit het Grieks en betekent zoiets als ‘niet samenvallend’. De grafiek valt nooit samen met een asymptoot.

Opgave 1

In de **Uitleg** zie je de grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ ook voor negatieve waarden van x.

Eerst bekijk je de grafiek met $b = 6$, $g = 2$ en $a = 0$.

a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt? En als x met 1 afneemt?

b De beginhoeveelheid, de uitkomst bij $x = 0$, is 6. Vul nu de tabel in door middel van verdubbelen en halveren.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

Tabel 2

Je kunt nu vanuit de tabel zelf de grafiek tekenen bij de gegeven exponentiële functie. Maar de uitkomsten voor bijvoorbeeld $x = 0{,}5$ kun je (waarschijnlijk) niet zonder rekenmachine uitrekenen. Maar als je die uitkomst weet, dan kun je wel door verdubbelen en halveren de uitkomsten bij $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$, $x = -0{,}5$, enzovoorts, uitrekenen.

c Welke uitkomst (in drie decimalen nauwkeurig) geeft je rekenmachine voor $x = 0{,}5$? En welke uitkomsten volgen hieruit voor $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$, $x = -0{,}5$ en $x = -1{,}5$?

d Kies nu bijvoorbeeld $x = 0{,}3$ en bekijk de uitkomst die je rekenmachine geeft. Leid andere uitkomsten af door verdubbelen en halveren. En zo kun je ook te werk gaan met andere niet gehele waarden voor x.

e Welke horizontale lijn is de asymptoot van deze grafiek?

Opgave 2

In de **Uitleg** zie je de grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ ook voor negatieve waarden van x. Werk met de applet.

Nu bekijk je de grafieken van functies van de vorm $y_a = 6 \cdot 2^x + a$ en ga je de waarden van a veranderen. Je vergelijkt de grafieken met die van $y_0 = 6 \cdot 2^x$.

a Neem $a = 3$. Wat is er aan de hand met alle uitkomsten van y_3 en vergelijking met die van y_0?

b Welke asymptoot heeft de grafiek van y_3?

c Beantwoord dezelfde twee vragen als bij a en b voor andere waarden van a. Kies ook enkele negatieve waarden voor a.

d Voor welke a gaat de grafiek van y_a door de oorsprong?

Opgave 3

Gegeven is de exponentiële functie $y = 6 \cdot 0{,}5^x$.

a Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt? En als x met 1 afneemt?

b De beginhoeveelheid, de uitkomst bij $x = 0$, is 6. Vul nu de tabel in door middel van verdubbelen en halveren.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

Tabel 3

c Welke uitkomst (in drie decimalen nauwkeurig) geeft je rekenmachine voor $x = 0{,}5$? En welke uitkomsten volgen hieruit voor $x = 1{,}5$, $x = 2{,}5$, $x = -0{,}5$ en $x = -1{,}5$?

d Kies bijvoorbeeld $x = 0{,}3$ en bekijk de uitkomst die je rekenmachine geeft. Leid andere uitkomsten af door verdubbelen en halveren. En zo kun je ook te werk gaan met andere niet gehele waarden voor x.

e Welke horizontale lijn is de asymptoot van deze grafiek?

f Welke horizontale lijn is de asymptoot van de grafiek van $y = 6 \cdot 0{,}5^x - 5$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

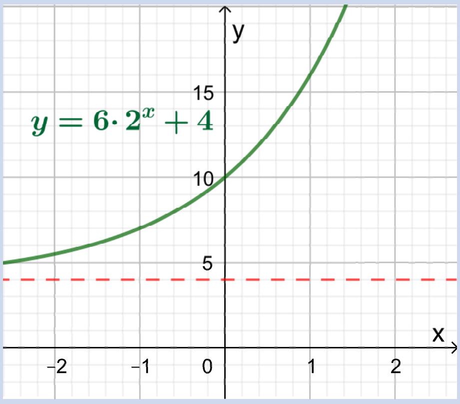
Bekijk de applet: exponentiële functie

Elke functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ heet een **exponentiële functie**. Er zijn twee soorten exponentiële functies:

- exponentiële functies met een stijgende grafiek als $g > 1$;
- exponentiële functies met een dalende grafiek als $0 < g < 1$.

Bij al deze functies is er sprake van een **asymptoot**. In dit geval is de asymptoot de lijn $y = a$, een lijn waar de grafiek wel steeds dichter bij komt te lopen, maar waar hij nooit mee samenvalt.

Hoe je een formule opstelt van de exponentiële functie vanuit twee gegeven punten op de grafiek, zie je in **Voorbeeld 2**.



Figuur 4

Voorbeeld 1

De formule van exponentiële functie is $y = 10 \cdot 1{,}5^x - 20$.
Teken een bijpassende grafiek en los op: $y \leq 20$ in twee decimalen nauwkeurig.

Antwoord

Deze functie heeft dezelfde grafiek als die van $y = 10 \cdot 1{,}5^x$ behalve dat hij 20 eenheden naar beneden is geschoven.

De grafiek van $y = 10 \cdot 1{,}5^x$ heeft een beginhoeveelheid van 10. Als x met 1 toeneemt, dan wordt de uitkomst met 1,5 vermenigvuldigd. Als x met 1 afneemt, dan wordt de uitkomst door 1,5 gedeeld. Hiermee maak je snel een tabel bij $y = 10 \cdot 1{,}5^x$. Als je dan van alle uitkomsten 20 aftrekt, heb je een tabel bij de gegeven functie.

Om de ongelijkheid op te lossen, bepaal je eerst de waarde van x waarvoor $10 \cdot 1{,}5^x - 20 = 20$. Dat kan meteen met inklemmen, maar het rekenwerk wordt iets eenvoudiger als je de vergelijking eerst herleidt tot $1{,}5^x = 4$. Je vindt $x \approx 3{,}419$.
De oplossing is daarom $x \leq 3{,}41$.

Opgave 4

In zie je hoe de grafiek van een exponentiële functie kunt tekenen door gebruik te maken van de eigenschappen van zo'n grafiek.

a Je begint met een tabel bij $y = 10 \cdot 1{,}5^x$ te maken vanuit de beginhoeveelheid. Vul deze tabel in:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

Tabel 4

b Alle uitkomsten bij de gegeven functie krijg je door in de tabel bij a van alle uitkomsten 20 af te trekken. Doe dat en teken de gevraagde grafiek.

c Nu ga je de ongelijkheid oplossen. Teken eerst de lijn $y = 20$ in je grafiek en geef het snijpunt van deze lijn met de grafiek aan.

d Laat zien hoe je aan het uiteindelijke antwoord van de ongelijkheid kunt komen. Licht vooral ook de afronding toe.

Opgave 5

De formule van een exponentiële functie is $y = 20 \cdot 0{,}8^x + 5$.

Teken een bijpassende grafiek en los op: $y \leq 10$ in twee decimalen nauwkeurig.

Voorbeeld 2

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de punten $A(0{,}12)$ en $B(3{,}7)$ gaat en de lijn $y = 2$ de asymptoot is.
Stel een passend functievoorschrift op.

Antwoord

Omdat de asymptoot $y = 2$ is, geldt in de gegeven formule $a = 2$.

De formule komt er nu zo uit te zien: $y = b \cdot g^x + 2$.
$A(0{,}12)$ invullen geeft: $b \cdot g^0 + 2 = 12$ en dus $b = 10$.
$B(3{,}7)$ invullen geeft: $10 \cdot g^3 + 2 = 7$ en dus $g^3 = 0{,}5$ zodat $g = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}79$.

De gevraagde formule wordt $y = 10 \cdot 0{,}79^x + 2$.

Opgave 6

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de punten $A(0{,}40)$ en $B(4{,}25)$ gaat en de lijn $y = 10$ de asymptoot is.

Stel een passend functievoorschrift op.

Opgave 7

Van een exponentiële functie $y = b \cdot g^x + a$ is gegeven dat de grafiek door de oorsprong en het punt $A(4{,}6)$ gaat en de lijn $y = -3$ de asymptoot is.

Stel een passend functievoorschrift op.

Verwerken

Opgave 8

Gegeven is de exponentiële functie met formule $y = 60 \cdot 0{,}75^x + 12$.

a Maak eerst een tabel zoals deze van $y = 60 \cdot 0{,}75^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Tabel 5

b Hoe maak je nu vanuit de tabel bij a de grafiek van de gegeven functie?

c Welke asymptoot heeft de grafiek?

d Voor welke waarden van x geldt $60 \cdot 0{,}75^x + 12 \leq 15$? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

De lucht in een autoband wordt vaak opgepompt tot een druk van 2,2 bar. De luchtdruk van de buitenlucht is ongeveer 1,0 bar. De band verliest langzaam zijn druk tot die druk gelijk is aan die van de buitenlucht. En dus is die druk P (in bar) afhankelijk van de tijd t (in dagen) na het oppompen.

Neem aan dat voor een bepaalde band geldt $P = 2{,}2 \cdot 0{,}96^t + 1$.

a Welke asymptoot heeft de grafiek van P als functie van t? En welke betekenis heeft die asymptoot voor de druk in de band?

b Waarom hebben negatieve waarden van t hier geen betekenis?

c Een autoband is te zacht als de druk lager is dan 1,6 bar. Hoeveel dagen na het oppompen is dat het geval?

Opgave 10

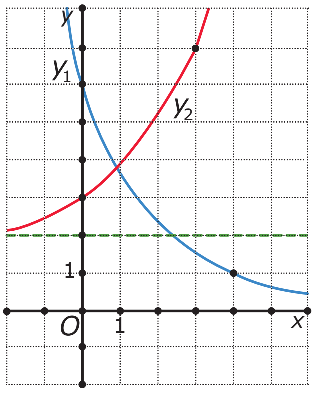
Van een exponentiële functie zijn de volgende gegevens bekend. De grafiek benadert voor grote waarden van x de lijn $y = 5$. De punten $A(0{,}10)$ en $B(2{,}8)$ liggen op de grafiek.

Stel een bijpassende formule op.

Opgave 11

Je ziet hier twee grafieken van exponentiële functies. De x-as is asymptoot van y_1, de lijn $y = 2$ is de asymptoot van y_2.

Stel bijpassende formules op.



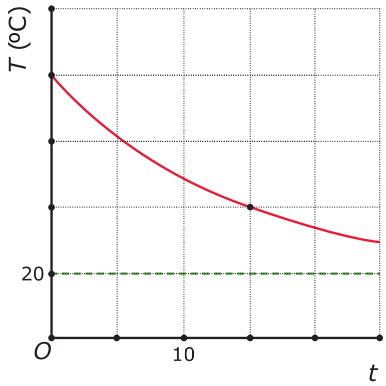
Figuur 5

Toepassen

Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80 °C heeft, een temperatuurverschil van 60 °C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20 °C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Je ziet in de grafiek dat het temperatuurverschil met de omgeving $T - 20$ na 15 minuten $\frac{1}{3}$ deel van het temperatuurverschil op $t = 0$ is. Hiermee kun je de groeifactor van het temperatuurverschil uitrekenen en een formule opstellen voor $T - 20$ en dus ook voor T als functie van t in minuten.



Figuur 6

Opgave 12: Afkoelende thee

Bekijk de grafiek van het afkoelen van een kop hete thee hierboven.

Voor het temperatuurverschil met de omgeving geldt volgens de tekst $T - 20 = b \cdot g^t$.

a Licht dit toe.

b Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.

c Stel een formule op voor T als functie van t.

d Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager van 25 °C?

Opgave 13: Opwarmende melk

Melk komt met een temperatuur van 6 °C uit de koelkast en warmt langzaam op naar kamertemperatuur (20 °C). Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat de melk 10 minuten nadat ze uit de koelkast is gehaald een temperatuur van 13 °C heeft.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van de opwarming van de melk. Stel ook een bijpassende formule op.

Testen

Opgave 14

Gegeven is de exponentiële functie $y = 15 \cdot 1{,}2^x + 5$.

a Maak eerst een tabel zoals deze van $y = 15 \cdot 1{,}2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

Tabel 6

b Hoe maak je nu vanuit de tabel bij a de grafiek van de gegeven functie?

c Welke asymptoot heeft de grafiek?

d Voor welke waarden van x geldt $15 \cdot 1{,}2^x + 5 \leq 10$? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 15

De grafiek van een exponentiële functie van de vorm $y = b \cdot g^x + c$ gaat door (0,300) en (4,200) en heeft horizontale asymptoot $y = 100$.

Stel een formule op voor y.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.