2.6 Totaalbeeld

Samenvatten

Met kwadratische verbanden heb je al leren werken. In dit onderwerp is die kennis herhaald en uitgebreid. Het begrip kwadratische functie is ingevoerd en je hebt geleerd hoe je een formule moet maken bij een kwadratische functie als de top van de grafiek en een punt op de grafiek zijn gegeven of als de nulpunten en een punt op de grafiek zijn gegeven. Ook het werken met (kwadratische) vergelijkingen om snijpunten en nulpunten te berekenen is voorbij gekomen, met name kwadraat afsplitsen en de abc-formule, maar ook technieken om kwadratische vergelijkingen handig op te lossen.

De onderstaande opgaven zijn bedoeld om overzicht over het onderwerp **'Kwadratische verbanden'** te krijgen. Dit betreft de onderdelen 1, 2, 3, 4 en 5 van dit onderwerp. Het is nuttig om er een eigen samenvatting bij te maken. De opgaven hieronder zijn bedoeld om je daarbij te helpen.

Begrippenlijst

- kwadratische functie — parabool — top — extreme waarde;
- kwadraat afsplitsen — nulpunten;
- tweedegraads vergelijking (kwadratische functie) — abc-formule — discriminant;
- handige oplossingsmethoden;
- symmetrie-as — raaklijn — raakpunten.

Activiteitenlijst

- van een kwadratische functie van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ de top en de extreme (uiterste) waarde bepalen en de grafiek tekenen;
- nulpunten en top bepalen, drie gedaantes van de formule bij een kwadratische functie — formules opstellen als de top of de nulpunten en nog een extra punt van de grafiek zijn gegeven;
- de abc-formule gebruiken om een kwadratische vergelijking systematisch op te lossen — de discriminant van een kwadratische vergelijking;
- kwadratische vergelijkingen handig oplossen, onder andere door ontbinden in factoren, terugrekenen en de abc-formule;
- werken met parabolen en lijnen die elkaar snijden en raken.

Opgave 1

Een afgeschoten kogel volgt bij benadering een baan die de vorm van een parabool heeft. Een voorbeeld van zo'n kogelbaan is de parabool met formule $h = \text{-}0{,}0001(x-150)^2 + 4$. Hierin is h de hoogte van de kogel boven de grond en x de afstand die de kogel horizontaal heeft afgelegd.

a Op welke hoogte wordt de kogel afgeschoten?

b Welk punt is het hoogste punt dat de kogel bereikt?

c Na hoeveel m komt deze kogel op de grond?

Opgave 2

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$.

a Laat zien, dat deze formule kan worden geschreven als $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2}$.

b Welke extreme waarde heeft deze kwadratische functie? Is het een minimum of een maximum?

c Laat zien dat deze formule kan worden geschreven als $y = \frac{1}{2}(x-2)(x-4)$.

d Wat zijn de nulpunten van de parabool die de grafiek is van deze kwadratische functie?

Opgave 3

De grafiek van een kwadratische functie heeft nulpunten (-2,0) en (5,0) en snijdt de y-as in (0,3). Stel een bijpassende formule op en bereken de top van deze grafiek.

Opgave 4

Los de volgende kwadratische vergelijkingen exact op.

a $x^2 + 3x - 5 = 0$

b $x^2 + 3x - 4 = 0$

c $2x^2 - 4x = 48$

d $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$

e $3x^2 + x\sqrt{3} = 2$

f $x(x - 3) = 2 + x^2$

Opgave 5

Los de volgende vergelijkingen zo handig mogelijk exact op.

a $(2x - 6)^2 = 11$

b $x(x - 2) = 5x - 10$

c $(x - 3)(2x - 5) = 15$

d $(x - 3)(2x - 5) = 0$

e $\left(x^2 - 3\right)^2 = (2x + 1)^2$

f $\left(x^2 - 4\right)(x - 3) = 12$

Opgave 6

Gegeven zijn de serie lineaire functies met formule $y = 4x - p$ en de kwadratische functie $y =$ -$0{,}5x^2 + 6x$.

a Als $p = 0$ heeft de grafiek van de bijbehorende lineaire functie twee punten gemeen met de grafiek van de kwadratische functie. Toon dit aan met behulp van de bijbehorende vergelijking.

b Voor welke p raken de grafieken van zo'n lineaire functie en de kwadratische functie elkaar?

c Bereken het bijbehorende raakpunt.

Testen

Opgave 7

De brug over de rivier de Tyne in het noordoosten van Engeland wordt vaak als voorbeeld genoemd voor een parabolische boog, een boog in de vorm van een parabool. Uitgaande van een assenstelsel waarin de y-as langs de verticale rechterwand van de linkertoren ligt en de x-as over de bovenkant van het horizontale wegdek ligt, zou dit op grond van afstand tussen beide torens en de plaats van de top van de parabool de bijbehorende formule:

$y =$ -$0{,}0084(x - 81)^2 + 33$

moeten zijn. In deze opgave ga je uit van deze formule.

Figuur 1

a Hoeveel meter zit de top van de parabool boven het wegdek?

b Hoeveel meter is de afstand tussen beide torens?

c Op hoeveel meter onder het wegdek zit de parabool aan de torens bevestigd?

d Hoeveel meter zit er tussen de punten die de parabool met de bovenkant van het wegdek gemeen heeft? Geef je antwoord in dm nauwkeurig.

Opgave 8

Gegeven zijn de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

a Schrijf met behulp van kwadraat afsplitsen de formule van de kwadratische functie in de vorm $y = a(x-p)^2 + q$. Bepaal vervolgens de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

b Bereken de snijpunten van de parabool met de x-as.

c Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van beide functies.

Opgave 9

Los de volgende vergelijkingen algebraïsch op. Geef daarna de eindantwoorden exact of (waar nodig) in twee decimalen nauwkeurig.

a $x^2 + 3x = 4$

b $2x^2 + 15x = 36$

c $3x^2 = 48$

d $(2x-4)(x-3) = 12$

e $(2x-4)(x-3) = 0$

f $(x-4)^2 + x^2 = 40$

g $x^4 = 81$

h $3x^8 + 27x^6 = 0$

i $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

j $16 - (3-x)^2 = 0$

k $2x^2 = x + 8$

l $x^4 - 8x^2 = 9$

Opgave 10

Een kwadratische functie heeft als formule $y = x^2 + 40x + 10$.

a Schrijf door een kwadraat af te splitsen de formule in de vorm $y = (x-a)^2 + b$.

b Bereken de exacte coördinaten van de snijpunten van de grafiek van deze kwadratische functie met de x-as.

Bekijk nu de formule $y = x^2 + px + q$.

c Schrijf door een kwadraat af te splitsen ook deze formule in de vorm $y = (x-a)^2 + b$.

d Bereken met behulp van de formule die je in de voorgaande vraag hebt gevonden de exacte x-waarden van de nulpunten van de bijbehorende grafiek.

Je hebt nu een formule afgeleid voor de x-waarden van de nulpunten van kwadratische functies van de vorm $y = x^2 + px + q$. Dit heet wel de pq-formule voor kwadratische functies.

e Neem $p = 40$ en $q = 10$. Laat zien dat de pq-formule dezelfde waarden oplevert als bij b.

Opgave 11

Los de volgende vergelijkingen exact op.

a $\left(x^2 - 1\right)^2 = \left(3 - 2x^2\right)^2$

b $x^2\left(x^2 - 4x\right) = 2x^2$

Opgave 12

Een boer heeft een stuk land dat zuiver rechthoekig is en aan de twee lange zijden en aan één van de twee korte zijden omgeven is door een boswal van 5 m breed. Alleen aan de kant van de weg zit geen boswal, maar een sloot voor de afwatering. Het stuk land is twee keer zo lang als het breed is. Als deze boer de boswal volledig bij zijn land trekt, wordt de oppervlakte precies twee keer zo groot.

Bereken de afmetingen van het stuk land als de boswal nog intact is. Gebruik daarbij een vergelijking en rond je antwoord af op dm nauwkeurig.

Opgave 13

De geitenfokvereniging van Oldeberkoop wil bij een reisbureau een busreis boeken naar Zwitserland, een bekend geitenland in Europa. Die reis kost elk van de 40 leden van die vereniging € 600,=. Omdat het reisbureau echter een bus voor 54 personen moet inzetten, melden zij de geitenfokkers dat elke extra passagier waarvoor zij kunnen zorgen voor elke deelnemer aan de reis een korting van € 10,= betekent.

Onderzoek of dit voor het reisbureau gunstig is. Bij welk aantal deelnemers is de opbrengst voor het reisbureau zo hoog mogelijk?

Opgave 14

Gegeven is een serie kwadratische functies door de formule $y = px^2 + 2x - 3$.

a Voor welke waarde van p heeft zo'n kwadratische functie een uiterste waarde van 0? Gaat het dan om een minimum of een maximum?

b Voor welke waarde van p ligt de top van de grafiek van zo'n kwadratische functie op de lijn $y = 2x+3$?

c Voor welke waarde van p raakt de lijn $y = -2x + 3$ de grafiek van zo'n kwadratische functie?

Toepassen

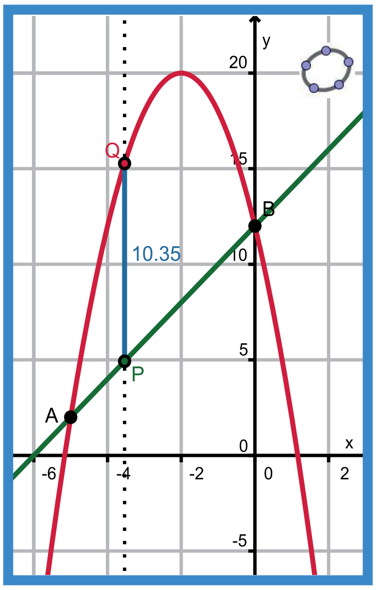
Bekijk de applet.

Bekijk de grafieken van de kwadratische functie met formule $y = -2x^2 - 8x + 12$ en de lineaire functie met formule $y = 2x + 12$.

Je ziet in de figuur een lijnstuk PQ dat evenwijdig is aan de verticale as en waarvan punt P op de grafiek van de lineaire functie en punt Q op de grafiek van de kwadratische functie ligt. De x-coördinaat van de punten P en Q is een getal tussen -5 en 0.

Als je het punt Q verplaatst dan wordt de lengte van het lijnstuk PQ langer of korter. Met de applet kun je uitzoeken voor welke waarde van x de lengte van dit lijnstuk maximaal is.

Maar je kunt dit ook exact berekenen...



Figuur 2

Opgave 15: Maximale lengte

Tussen de grafieken van de functies die je hierboven ziet bevindt zich lijnstuk PQ.

De lengte van dit lijnstuk kan variëren, je wilt de maximale lengte weten, want de minimale lengte is 0.

a Waarom is het minimum van de lengte van het daar beschreven lijnstuk 0?

b Noem de x-waarde van beide punten p. Welke coördinaten hebben P en Q dan?

c Leg uit dat de lengte van lijnstuk PQ gelijk is aan $L = -2p^2 - 10p$.

d De grafiek van L als functie van p is een bergparabool. Bereken het maximum van die functie.

Opgave 16: Maximale oppervlakte van een lijnstuk tussen twee parabolen

Gegeven zijn de kwadratische functies met formules $y_1 = 4 - x^2$ en $y_2 = x^2 - 2x$. Op de grafiek van y_1 ligt het punt P waarvan de x-coördinaat tussen -1 en 2 ligt. Op de grafiek van y_2 ligt het punt Q met dezelfde x-coördinaat als punt P. Het lijnstuk PQ verbindt beide punten.

a Maak een schets van deze situatie. (Of - nog mooier - teken deze situatie in GeoGebra.)

b Als je punt P varieert, verandert ook de lengte van lijnstuk PQ. Bereken de maximale lengte van dit lijnstuk.

Opgave 17: Winstmaximalisatie

In de micro-economie wordt het volgende rekenmodel voor de winst van de verkoop van een bepaald product gehanteerd als het bedrijf de enige aanbieder is.

Het aantal verkochte producten hangt alleen af van de prijs p in euro per stuk. Hoe hoger de prijs, hoe lager de hoeveelheid q die van dit product wordt verkocht per tijdseenheid. Bijvoorbeeld kan per week gelden $q = 500 - 2p$.

De inkoopkosten hangen weer af van de prijs per eenheid en de voorraadkosten. Bijvoorbeeld kan een eenheid product € 5,= kosten en de voorraadkosten kunnen € 2000,= per week zijn.

Voor de opbrengst als wekelijks de hele voorraad wordt verkocht geldt $TO = p \cdot q$, de wekelijkse kosten noem je TK en de winst is $TW = TO - TK$.

a Waarom is $TO = p \cdot q$?

b Laat zien dat $TW = p(500 - 2p) - (2000 + 5q)$.

Als je in de formule bij b $q = 500 - 2p$ substitueert, dan kun je hem herleiden tot $TW = -2p^2 + 510p - 4500$.

c Laat dat zien.

De winst is in dit rekenmodel een kwadratische functie van p.

d Bereken de maximale winst.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.