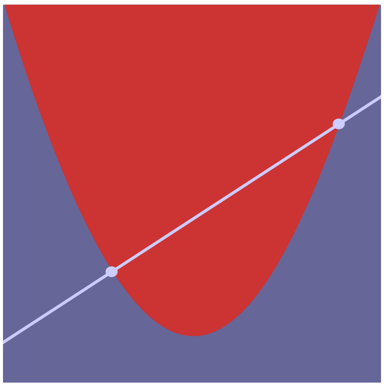
2.5 Lijnen en parabolen

Inleiding

Bij kwadratische functies horen parabolen, bij lineaire functies rechte lijnen. Je gaat nu hun onderlinge ligging bekijken, snijpunten uitrekenen bijvoorbeeld. Maar ook onderzoeken of ze elkaar raken.
Je leert raaklijnen aan parabolen op te stellen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de top van een parabool snel berekenen;
- onderzoeken wanneer lijnen en parabolen elkaar raken;
- raaklijnen aan parabolen opstellen.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule;
- bij kwadratische functies de top en de nulpunten berekenen.

Verkennen

Opgave V1

Bekijk de applet.

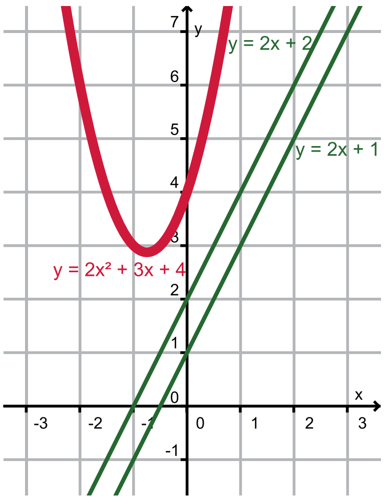
Je ziet hier een parabool met de bijbehorende formule $y = 2x^2 + 3x + 4$ en een rechte lijn met formule $y = 2x + p$. De waarde voor p kun je nog aanpassen. Dus je hebt eigenlijk met een hele serie lijnen te maken. Werk met de applet.

a Bij welke waarde van p gaat de rechte lijn door de top van de parabool?

b Bereken met behulp van kwadraat afsplitsen de exacte coördinaten van de top van de parabool. En bereken vervolgens de exacte waarde van p waarvoor de lijn door dit punt gaat.

c Bij welke waarde van p heeft de rechte lijn precies één punt met de parabool gemeen? Gebruik de applet.

d Kun je de waarde bedoeld bij c ook vinden met behulp van een berekening? Zo ja, hoe?



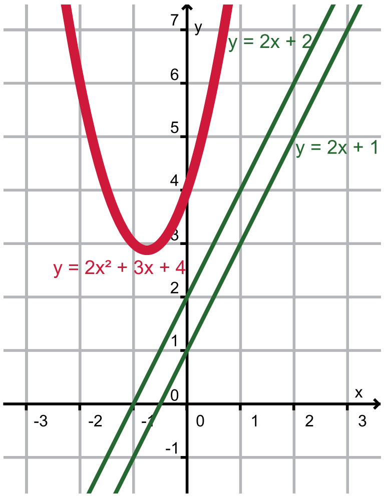
Figuur 2

Uitleg 1

Bekijk de applet.

Je ziet hier een parabool met de bijbehorende formule $y = 2x^2 + 3x + 4$ en een rechte lijn met formule $y = 2x + p$. De waarde voor p kun je nog aanpassen. Dus je hebt eigenlijk met een hele **familie van lijnen** te maken.

Eén van die lijnen gaat door de top van de parabool. Om de bijbehorende waarde van p te berekenen, moet je eerst de coördinaten van de top vaststellen. Dat kan door kwadraat afsplitsen. Maar bij formules van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ vind je dan altijd dat de x-coördinaat van de top $-\frac{b}{2a}$ is. In dit geval vind je $x_{top} = -\frac{3}{2 \cdot 2} = -0{,}75$. De bijbehorende y-coördinaat vind je door invullen in de parabool-formule.



Figuur 3

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je de top van een parabool van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ snel kunt vinden.

a Bereken op deze manier de top van de in de tekst hierboven gegeven parabool. Vergelijk je antwoord met dat wat je krijgt door kwadraat afsplitsen.

De formule $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ geldt voor elke parabool met formule $y = ax^2 + bx + c$.

b In de applet kun je de waarden van a en b veranderen. Ga na dat de symmetrieas mee verandert en dat daarvoor geldt $x = -\frac{b}{2a}$.

c Bereken de top van de in de tekst hierboven gegeven parabool door eerst twee punten op de parabool te berekenen waarvoor $y = 4$ en daarmee de symmetrieas te bepalen.

Je kunt de formule voor de top zelf vinden door de symmetrieas van de parabool te bepalen. Die symmetrieas is de middelloodlijn van twee punten met gelijke y-waarde op de parabool. Neem voor het gemak $y = c$ en bereken de bijbehorende x-waarden uit $ax^2 + bx + c = c$.

d Bereken de twee bedoelde punten en laat zien dat voor de symmetrieas inderdaad geldt $x = -\frac{b}{2a}$.

Opgave 2

Bereken van de volgende kwadratische functies de top van de bijbehorende parabool.

a $y_1 = 3x^2 - 5x + 2$

b $y_2 = -x^2 + 6x + 12$

c $y_3 = 3(x - 1)(x - 5)$

Uitleg 2

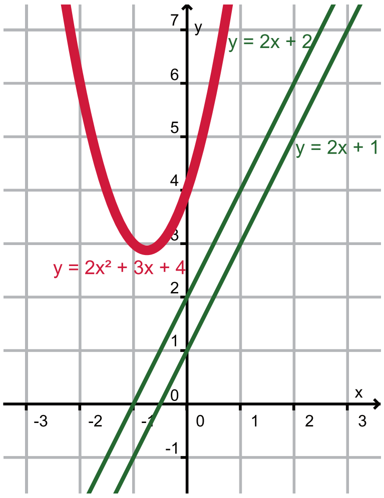
Bekijk de applet.

Je ziet hier een parabool met de bijbehorende formule $y = 2x^2 + 3x + 4$ en een rechte lijn met formule $y = 2x + p$. De waarde voor p kun je nog aanpassen. Dus je hebt eigenlijk met een hele serie lijnen te maken.

Veel lijnen uit deze serie hebben twee punten met de parabool gemeen. Maar er is ook een lijn uit de serie die precies één punt met parabool gemeen heeft. Die lijn is een 'raaklijn' aan de parabool. Je kunt berekenen welke waarde van p die lijn heeft.

Dan moet de vergelijking $2x^2+3x+4 = 2x+p$ precies één oplossing hebben.
Op 0 herleiden geeft $2x^2 + x + 4 - p = 0$.
Lees af: $a = 2$, $b = 1$ en $c = 4 - p$.
Eén oplossing betekent $D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (4 - p) = 0$. Hieruit vind je $p = 3{,}875$.

Je kunt nu ook het punt berekenen dat de raaklijn en de parabool gemeen hebben. Dit noem je het 'raakpunt'.



Figuur 4

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je kunt bepalen welke lijn van een gegeven serie lijnen een parabool raakt.

a Bereken op de manier die hierboven kort wordt beschreven dat voor de raaklijn van deze serie geldt $p = 3{,}875$.

b Bereken nu zelf de coördinaten van het raakpunt.

c Voor welke p hebben de lijn en de parabool geen snijpunten?

Bekijk nu de familie van lijnen gegeven door $y = -3x + p$ en de gegeven parabool.

d Voor welke p raakt een lijn van deze serie de gegeven parabool? Welk punt is het raakpunt?

Opgave 4

Gegeven is de kwadratische functie $y = -x^2 + 6x$ en een familie rechte lijnen met formule $y = -2x + p$.

a Bereken voor welke p een lijn van deze serie de gegeven parabool raakt.

b Bereken nu zelf de coördinaten van het raakpunt.

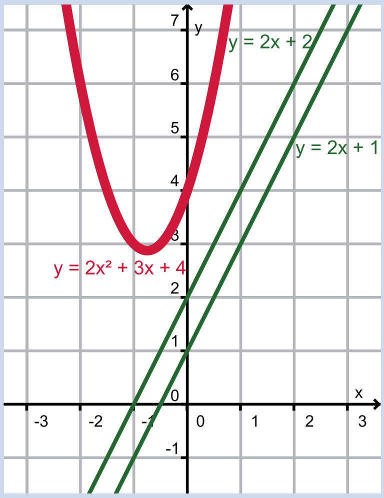
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

Van een parabool met een formule van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ is de **symmetrieas** de lijn
$x = -\frac{b}{2a}$
Omdat de **top** van de parabool op de symmetrieas ligt geldt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$. En de bijbehorende y-waarde van de top vind je door deze x_{top} in de formule in te vullen.

Een lijn kan met een parabool precies één punt gemeen hebben. Als die lijn niet (evenwijdig met) de symmetrieas van de parabool is, dan spreek je van een **raaklijn** aan de parabool. Het gemeenschappelijke punt heet het **raakpunt**.
Omdat de kwadratische vergelijking waarmee je de coördinaten van zo'n raakpunt uitrekent maar één waarde mag opleveren voor de variabele, moet daarvan de discriminant 0 zijn.
Als de discriminant groter is dan 0 dan hebben lijn en parabool twee punten gemeen. Als de discriminant kleiner is dan 0 dan hebben lijn en parabool geen punten gemeen.



Figuur 5

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Gegeven de parabool met formule $y = -2x^2 + 3x + 4$ en de serie lijnen met formule $y = 2x + n$.

Welke van deze serie lijnen gaat door de top van de parabool? En welke van deze serie lijnen raakt de parabool?

Antwoord

Bereken eerst de top van de parabool met $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot -2} = 0{,}75$.
De top van de parabool is daarom $T(0{,}75; 5{,}125)$.

De lijn $y = 2x + n$ gaat door T als $5{,}125 = 2 \cdot 0{,}75 + n$ en dat geeft $n = 3{,}625$.
De lijn $y = 2x + 3{,}625$ gaat door de top van de parabool.

Om te berekenen welke van deze serie lijnen de parabool raakt, bekijk je de vergelijking $-2x^2 + 3x + 4 = 2x + n$. Dit is een kwadratische vergelijking die maar één oplossing moet hebben, omdat er bij raken sprake is van slechts één gemeenschappelijk punt.
En daarbij werk je met de discriminant T van deze kwadratische vergelijking. Uit $D = 0$ vind je de gewenste waarde van n en kun je de vraag beantwoorden. Doe dat zelf.

Opgave 5

Bekijk de parabool en de serie lijnen in **Voorbeeld 1**.

a Welke symmetrieas heeft de gegeven parabool? Hoe wordt die symmetrieas gebruikt om de top van de parabool uit te rekenen?

b Reken na, dat de lijn met $n = 3{,}625$ door de top van de parabool gaat.

In het voorbeeld wordt ook berekend welke van de serie lijnen de parabool raakt. Daarbij wordt de discriminant van een kwadratische vergelijking gebruikt.

c Bepaal zelf die discriminant, dus druk hem uit in n.

d Bereken de vergelijking van de lijn uit deze serie die de parabool raakt.

e Bereken de coördinaten van het bijbehorende raakpunt.

Opgave 6

Gegeven zijn de kwadratische functie door $y = -x^2+3x$ en de serie lineaire functies door $y = -1{,}5x+n$.

In de applet in **Voorbeeld 1** kun je de bijbehorende grafieken instellen.

a Bereken voor welke n de lijn door de top T van de parabool gaat.

b Bereken voor welke n de lijn de parabool raakt en bereken de coördinaten van het raakpunt.

Opgave 7

Gegeven de parabool met formule $y = x^2 - 4x + 5$ en de serie lijnen met formule $y = mx + 3$.

In de applet in **Voorbeeld 1** kun je deze grafieken instellen.

a Bereken voor welke m de lijn door de top T van de parabool gaat.

b Ga met de applet na, dat er nu twee lijnen van deze serie zijn die de parabool raken.

c Bereken voor welke m de lijn de parabool raakt.

Opgave 8

In de **Theorie** wordt verteld wat een ‘raaklijn’ aan een parabool is. Bij elke parabool kun je echter één lijn tekenen die precies één punt met de parabool gemeen heeft en toch geen raaklijn aan de parabool is.

Beschrijf welke lijn dat is.

Voorbeeld 2

Ook twee parabolen kunnen elkaar snijden, raken, of geen gemeenschappelijke punten hebben.

Laat zien dat de parabolen met formules $y_1 = x^2 - 4x + 6$ en $y_2 = 4 - x^2$ elkaar raken.

Antwoord

Gemeenschappelijke punten van beide parabolen bepaal je met $x^2 - 4x + 6 = 4 - x^2$.
Deze vergelijking herleid je op 0 en je bepaalt dan met behulp van de discriminant D het aantal snijpunten. Je vindt $D = 0$ en daarom raken beide parabolen elkaar.

Het raakpunt bepaal je door de vergelijking verder op te lossen.

Opgave 9

Bekijk de twee parabolen in **Voorbeeld 2**.

a Laat zien dat inderdaad $D = 0$.

b Bereken het raakpunt van beide parabolen.

Opgave 10

Ga door berekening na of in de volgende gevallen de grafieken elkaar snijden, raken of geen gemeenschappelijke punten hebben.

a $y_1 = -x^2 + 4x - 3$ en $y_2 = -2x + 5{,}5$

b $y_1 = 2x^2 - 3x + 4$ en $y_2 = 0{,}5x^2 - 2{,}25$.

c $y_1 = 2x^2 - x + 3$ en $y_2 = x^2 - 3x + 2$.

Verwerken

Opgave 11

Gegeven zijn de kwadratische functie met formule $y = x^2 - 4x$ en de lineaire functie met formule $y = x - 4$.

a De grafiek van de kwadratische functie is een parabool. Bereken de top van die parabool.

b Bereken de coördinaten van de snijpunten van de bijbehorende grafieken.

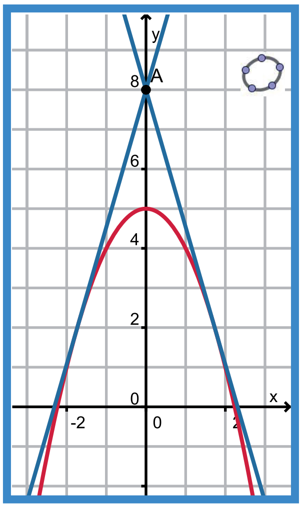
Er bestaat een serie lineaire functies met formules van de vorm $y = x + p$.

c Welke lineaire functie van deze serie raakt de grafiek van de gegeven kwadratische functie? Bereken het bijbehorende raakpunt.

Opgave 12

Je ziet hiernaast de grafiek van de kwadratische functie met formule $y = 5 - x^2$ en twee raaklijnen aan deze grafiek. Beide raaklijnen gaan door het punt (0,8). De raakpunten zijn de punten P en Q.

Bereken de lengte van lijnstuk PQ.



Figuur 6

Opgave 13

Gegeven is de kwadratische functie met formule $y = 0{,}5x^2 + px + 8$.

Voor welke p raakt de grafiek van deze functie de x-as?

Opgave 14

Onderzoek of de parabolen met formules $y_1 = 3x^2 - 12x + 14$ en $y_2 = -x^2 + 8x - 11$ elkaar raken. Bereken in dat geval het raakpunt.

Opgave 15

Voor welke waarden van a ligt de top van de parabool met formule $y = ax^2 + 2x + 3$ op de lijn met formule $y = 2x + 4$?

Toepassen

Een parabool kun je ook meetkundig construeren. Bij wiskunde D zul je **constructies van krommen zoals de parabool** tegenkomen.

Een parabool bestaat uit alle punten P die evenver van een gegeven lijn als van een gegeven punt afliggen. Als je een assenstelsel gebruikt dan kun je $y = -3$ als gegeven lijn en $F(0,3)$ als gegeven punt nemen. Je ziet in de applet hoe je dan de parabool construeert. De punten $P(x,y)$ van de parabool liggen op het snijpunt van de middelloodlijn van AF en een loodlijn in A op de gegeven lijn. Beweeg punt A en je ziet de parabool ontstaan.

Tenminste... krijg je wel een goede formule voor de plaats van de punten $P(x,y)$?

Bekijk de applet: parabool construeren

Opgave 16: Parabool constructie

Bekijk in **Toepassen** hoe een parabool in de meetkunde wordt omschreven. En hoe je hem met behulp van die omschrijving kunt construeren. Elk punt $P(x,y)$ van de parabool ligt op de middelloodlijn van AF en bovendien op de loodlijn door P op de gegeven lijn $y = -3$.

a Leg uit dat dit betekent dat de afstand van P tot F altijd even groot is dan die van P tot A en dus van P tot de gegeven lijn.

b Beweeg punt A en zie de parabool ontstaan. Ga na dat telkens $AP = y + 3$.

c Leg uit dat uit de stelling van Pythagoras volgt $PF^2 = x^2 + (y - 3)^2$.

d Omdat $PF^2 = AP^2$ kun je nu een formule afleiden voor de parabool. Laat zien dat die formule is te herleiden tot $x^2 = 12y$.

e Van welke kwadratische functie van x is deze parabool de grafiek?

Opgave 17: Meer parabolen

Verplaats in de applet het punt F naar $F(0,5)$.

a Stel een formule op voor de nieuwe parabool die daardoor ontstaat. Welk punt is nu de top van de parabool?

b Over welke kwadratische functie gaat het nu? Geef de bijpassende formule.

Testen

Opgave 18

Gegeven zijn de kwadratische functie $y = x^2 - 2x$ en de lineaire functie $y = -x + 2$.

a Bereken de snijpunten van beide functies.

b Voor welke waarde van p raakt de grafiek van $y = -x + p$ de grafieken van de gegeven kwadratische functie?

Opgave 19

Laat met behulp van een berekening zien of de twee parabolen bij de kwadratische functies $y = x^2 - 2x$ en $y = -1{,}5x^2 + 7{,}5x - 9$ elkaar raken.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.