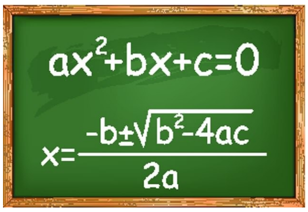
2.3 Kwadratische vergelijkingen

Inleiding

Zo'n 1200 jaar geleden bedacht de Perzische wiskundige **Al-Khwarizmi** een oplossing voor alle kwadratische vergelijkingen. Die oplossing heet tegenwoordig de abc-formule. Je ziet hem hier in moderne notatie.
Je moet van een gegeven vergelijking alleen de waarden van a, b en c aflezen en die invullen in de oplossingsformule en klaar.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- alle kwadratische vergelijkingen oplossen met de abc-formule;
- met behulp van de discriminant het aantal oplossingen van een kwadratische vergelijking bepalen.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische functies (met een geschikte formule) de top en de nulpunten bepalen.

Verkennen

Opgave V1

Wanneer je van een kwadratische functie de nulpunten wilt berekenen, moet je een vergelijking oplossen. Neem bijvoorbeeld $y = x^2 + 6x - 8$. Wil je van deze kwadratische functie de nulpunten berekenen dan moet je $x^2 + 6x - 8 = 0$ oplossen.

Los deze vergelijking op met behulp van kwadraat afsplitsen.

Opgave V2

Kwadraat afsplitsen is een manier om elke kwadratische vergelijking op te lossen.

Los op: $3x^2 + 7x + 1 = 0$.

Opgave V3

Kwadraat afsplitsen gaat altijd op dezelfde manier. Als je dit dus één keer netjes doet met de algemene vorm van een kwadratische vergelijking dan krijg je een formule voor alle oplossingen van een kwadratische vergelijking van die vorm.

Los op: $ax^2 + bx + c = 0$.

Uitleg 1

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2+bx+c = 0$ heet een ‘kwadratische vergelijking’ of ook wel ‘tweedegraads vergelijking’ (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

Elke kwadratische vergelijking kun je oplossen met behulp van kwadraat afsplitsen. Maar soms is dat nogal vervelend gereken met breuken en wortels. En dus doe je dat kwadraat afsplitsen één keer met de algemene vorm. Je vindt dan:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als $a \neq 0$.

Als je nu $3x^2 + 7x + 1 = 0$ wilt oplossen, dan maak je van de bovenstaande oplossing gebruik. Je leest af $a = 3$, $b = 7$ en $c = 1$.

Deze drie getallen vul je in de oplossing van de algemene vergelijking in en je krijgt de oplossing van jouw vergelijking:

$x = \frac{-7+\sqrt{7^2-4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} \vee x = \frac{-7-\sqrt{7^2-4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$

ofwel:

$x = \frac{-7+\sqrt{37}}{6} \vee x = \frac{-7-\sqrt{37}}{6}$

De oplossing van de algemene vorm $ax^2+bx+c = 0$ van een kwadratische vergelijking heet de 'abc-formule' of 'wortelformule'. Je kunt hem toepassen op elke kwadratische vergelijking die je eerst in de algemene vorm hebt geschreven.
In de abc-formule komen wortels en breuken voor. Soms komen die wortels uit en kun je de oplossing herleiden tot eenvoudige getallen. Maar vaak komen ze niet uit en laat je gewoon de oplossing met wortels en breuken zo staan.

Omdat beide uitdrukkingen dan maar weinig verschillen, schrijf je wel kortweg:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Het teken $\pm$ betekent 'plus of min' en geeft aan dat er twee oplossingen zijn. (En het heeft dus niets te maken met 'plusminus', een woord waarmee 'ongeveer' wordt bedoeld.)

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je een kwadratische vergelijking oplost met de abc-formule.

a Los zelf de vergelijking $3x^2 + 7x + 1 = 0$ op met behulp van de abc-formule.

b Vergelijk je antwoord met dat in **Opgave V2**. Komen ze overeen?

c Geef benaderingen van beide x-waarden van de oplossing in drie decimalen nauwkeurig.

In **Opgave V1** werd de oplossing van $x^2 + 6x - 8 = 0$ gevraagd.

d Bepaal de oplossing van deze vergelijking met de wortelformule. Ga na, dat je oplossing overeen komt met de oplossing die je eerder hebt gevonden.

Bij het gebruik van de abc-formule moet je er wel op letten dat de vergelijking die je oplost kwadratisch is en de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heeft.

e Waarom betekent dit dat $a \neq 0$?

f Los op: $4 + 2x^2 = 6x$.

Opgave 2

Los de volgende vergelijkingen op met de abc-formule.

a $x^2 + 12x + 4 = 0$

b $2x^2 + 5x - 10 = 0$

c $5x - x^2 + 7 = 0$

d $9x^2 = 17 - 10x$

e $2x^2 + 16 = 12x$

f $3x^2 + 8x - 3 = 0$

Uitleg 2

Bekijk de applet.

In de applet kun je formules van vorm $y = ax^2 + bx + c$ instellen en de nulpunten van de grafiek bekijken.
Om die nulpunten te berekenen moet je $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen. De oplossing vind je met de abc-formule.

Bekijk in de applet, dat:

- $2x^2 - 6x - 1 = 0$ een oplossing met twee x-waarden heeft;
- $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$ een oplossing met één x-waarde heeft;
- $2x^2 - 6x + 6 = 0$ geen reële oplossing heeft.

Je merkt dit ook snel als je de oplossing met de abc-formule probeert te vinden. De wortel uit een negatief getal levert immers geen reële waarde op! Daarom wordt het aantal waarden in de oplossing (of kortweg het aantal oplossingen) van een kwadratische vergelijking bepaald door de uitdrukking $b^2 - 4ac$ die onder het wortelteken staat. Als deze uitdrukking negatief is heeft de oplossing er geen reële waarden. En als er uit deze uitdrukking 0 komt, dan is er maar één waarde in de oplossing.

Het is dus bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst $D = b^2 - 4ac$ te berekenen. Als $D > 0$ heb je twee waarden in de oplossing, als $D = 0$ heb je er één en als $D < 0$ zijn er geen reële waarden in de oplossing. Je noemt D de ‘discriminant’ van de kwadratische vergelijking. Dat komt van het woord ‘discrimineren’ wat ‘onderscheid maken’ betekent.

Opgave 3

Bekijk in **Uitleg 2** hoe je het aantal oplossingen van kwadratische vergelijking kunt bepalen.

a Uit hoeveel waarden bestaat de oplossing van een kwadratische vergelijking maximaal? En waarom?

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x - 1 = 0$.

b Bereken eerst de discriminant van deze vergelijking.

c Hoeveel waarden zitten er in de oplossing van deze vergelijking? Bereken vervolgens de oplossing.

d Geef een benadering van de oplossing van deze vergelijking in één decimaal nauwkeurig. Ga in de applet na dat ze overeenkomen met de x-waarden van de nulpunten van de bijbehorende parabool.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 4{,}5 = 0$.

e Laat met behulp van de discriminant zien, dat de oplossing van de vergelijking één waarde heeft. Bereken vervolgens die éne oplossing.

Bekijk nu de vergelijking $2x^2 - 6x + 6 = 0$.

f Laat met behulp van de discriminant zien, dat de vergelijking geen reële oplossing heeft.

Opgave 4

Bepaal van de volgende kwadratische vergelijkingen eerst het aantal oplossingen (dus het aantal waarden in de oplossing). Los ze vervolgens op.

a $2x^2 + 5x - 20 = 0$

b $11 + 3x^2 = 9x$

c $3x^2 = 4x - 1$

d $4x^2 - 20x + 25 = 0$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke vergelijking die je kunt schrijven in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ heet een **kwadratische vergelijking** of ook wel **tweedegraads vergelijking** (mits $a \neq 0$) omdat de hoogste macht van de onbekende x die voorkomt 2 is. (Een lineaire vergelijking noem je ook wel een eerstegraads vergelijking.)

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ is

$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Deze oplossing noem je de **abc-formule**.

Bewijs 1

Hieronder zie je een **bewijs van de abc-formule**. Dat wil zeggen dat je aantoont dat de formule in alle gevallen klopt. Je gaat daartoe $ax^2 + bx + c = 0$ in algemene zin oplossen met behulp van kwadraat afsplitsen.

Neem aan dat $a \neq 0$ (anders is het ook geen kwadratische vergelijking!). Je kunt dan aan beide kanten van het isgelijkteken delen door a. Dat geeft:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Een kwadraat afsplitsen levert op:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ en $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Worteltrekken:

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

En nu een beetje herleiden:

$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

En hiermee is de abc-formule gevonden.

Het is bij het oplossen van een kwadratische vergelijking handig om eerst de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ te berekenen.

- Als $D > 0$ heb je twee waarden in de oplossing.
- Als $D = 0$ heb je één waarde in de oplossing.
- Als $D < 0$ heb je geen reële waarden in de oplossing.

Je kunt hiermee de oplossing van elke kwadratische vergelijking kortweg zo opschrijven:

De oplossing van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is $x = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Bekijk ook de (engelstalige) videoclip ‘quadratic formula’ in het **Practicum**.

Voorbeeld 1

Los de vergelijking $(x - 2)(x - 3) = 3$ op.

Antwoord

Haakjes wegwerken en op 0 herleiden levert de vergelijking $x^2 - 5x + 3 = 0$ op.

Deze vergelijking kun je oplossen met de abc-formule. Je berekent dan liever eerst de discriminant, dan weet je of er een oplossing is.

Lees af: $a = 1$, $b = -5$ en $c = 3$.

En dus is $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 13$. De discriminant is positief en de oplossing bestaat dus uit twee waarden.

De oplossing is $x = \frac{--5\pm\sqrt{13}}{2\cdot 1} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

Opgave 5

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe een kwadratische vergelijking wordt opgelost met de abc-formule. Leer deze formule uit het hoofd en zorg dat je de manier van werken beheerst! Bekijk eventueel bij het **Practicum** een (engelstalige) videoclip over de ‘quadratic formula’.

a Herleiden op 0 is een belangrijke stap voordat je de abc-formule gaat toepassen. Waarom voer je deze stap eigenlijk uit?

b Laat zien, dat je door haakjes wegwerken en op 0 herleiden inderdaad op $x^2 - 5x + 3 = 0$ komt.

c Waarom staat bij de berekening van de discriminant de -5 eigenlijk tussen haakjes?

d Schrijf beide waarden van de oplossing afzonderlijk op en benader ze in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 6

Los de volgende vergelijkingen op indien mogelijk.

a $3x^2 + 4 = 7x$

b $(x + 1)(2x - 1) = 4$

c $4x = x^2 + 7$

d $(x + 3)^2 = 4x$

e $(2x + 4)^2 = 32x$

f $(2x + 4)^2 = 32$

Opgave 7

Bekijk de vergelijking $(x + 4)^2 = 4 + x^2$.

a Is dit een kwadratische vergelijking?

b Werk de haakjes weg en herleid de vergelijking op 0.

c Hoe los je nu de vergelijking verder op?

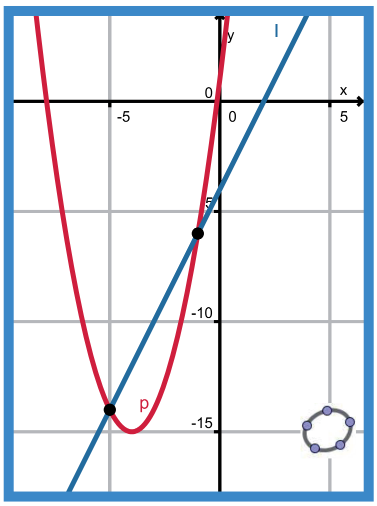
Opgave 8

Oefen het oplossen van kwadratische vergelijkingen met de abc-formule via **Practicum**.

Je oefent jezelf met behulp van AlgebraKIT. Blijf oefenen tot je vrijwel geen fouten meer maakt.

Voorbeeld 2

Gegeven zijn een kwadratische functie met formule $y_1 = x^2 + 8x + 1$ en een lineaire functie met formule $y_2 = 2x - 4$. Bereken de coördinaten van de snijpunten van hun grafieken.



Figuur 2

Antwoord

In de snijpunten geldt $x^2 + 8x + 1 = 2x - 4$.

Deze vergelijking kun je oplossen door eerst op 0 te herleiden en dan de abc-formule toe te passen. Aan de grafieken zie je dat er twee x-waarden uit moeten komen.

Uit $x^2 + 6x + 5 = 0$ lees je af: $a = 1$, $b = 6$ en $c = 5$.

De oplossing is $x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$. En dus vind je $x = -5 \vee x = -1$.

Om beide snijpunten te vinden, moet je deze x-waarden nog invullen. Ga na, dat dit de snijpunten (-5,-14) en (-1,-6) oplevert.

Opgave 9

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe je de snijpunten van een parabool en een rechte lijn berekent.

a In dit voorbeeld is de abc-formule gebruikt om de kwadratische vergelijking op te lossen. Dit kan ook met de som-en-productmethode. Laat dat zien.

b Waarom is hier het werken met de discriminant overbodig?

c Als je de twee x-waarden hebt gevonden, moet je de bijbehorende y-waarden berekenen. Laat zien hoe je dat doet.

d Maakt het uit in welke van beide formules je de gevonden waarden van x invult? Waarom?

Opgave 10

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de volgende formules.

a $y_1 = x^2 + 3x + 1$ en $y_2 = -x - 2$.

b $y_1 = (x+2)(x-3)$ en $y_2 = 2x + 4$.

c $y_1 = x^2$ en $y_2 = 2$.

Opgave 11

In de voorgaande opgave en ook in **Voorbeeld 2** waren de coördinaten van de snijpunten van beide grafieken gehele getallen. Maar dat hoeft niet.

Neem bijvoorbeeld de functies $y_1 = (x+1)^2$ en $y_2 = 4 - x^2$.

a Met welke vergelijking bereken je de snijpunten van de twee bijbehorende grafieken?

b Hoe kun je aan de discriminant van deze vergelijking zien dat er twee snijpunten zijn waarvan de coördinaten geen gehele getallen zijn?

c Bereken de snijpunten van beide parabolen op twee decimalen nauwkeurig.

Verwerken

Opgave 12

Bereken de oplossing van de volgende kwadratische vergelijkingen.

a $x^2 + 5x + 1 = 0$

b $2x^2 - 3x - 2 = 0$

c $-5x^2 - 7x = 1$

d $x(2x+3) = 3$

e $x(2x+3) = 3x$

f $x(2x+3) = 0$

g $(x+3)(x-5) = 2$

h $(x+3)(x-5) = 0$

i $(2x+5)^2 = 5$

j $(x+1)^2 = (4-x)^2$

Opgave 13

Onderzoek hoeveel oplossingen de volgende kwadratische vergelijkingen hebben (dus uit hoeveel waarden de oplossing bestaat).

a $2x^2 + 5x - 1 = 0$

b $5x^2 - x = 1$

c $-2x^2 + 6x = 18$

d $x(4x+1) = (1-2x)^2$

e $(1-2x)^2 = 12$

f $(x-1)^2 + 4 = 0$

Opgave 14

Je ziet hier de grafieken van twee kwadratische functies en een lineaire functie. Ga er van uit dat de roosterpunten die op de grafieken lijken te liggen dat ook inderdaad doen.
Bij het berekenen van snijpunten of nulpunten, moet je telkens een vergelijking oplossen. Aan de discriminant van die vergelijking kun je zien hoeveel snijpunten er zijn. Geef in de volgende gevallen aan of die discriminant negatief, positief of 0 is en ook of die discriminant een kwadraat is.

a $y_1 = y_3$

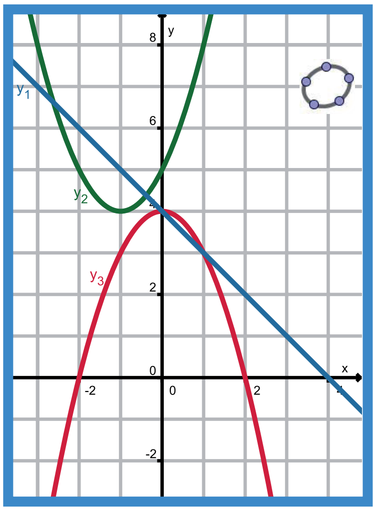
b $y_1 = y_2$

c $y_2 = y_3$

d $y_3 = 0$

e $y_2 = 0$

f $y_2 = 4$



Figuur 3

Opgave 15

Hieronder zijn telkens twee formules gegeven. Bereken de eventuele snijpunten van de bijbehorende grafieken. Geef waar nodig benaderingen in één decimaal nauwkeurig.

a $y_1 = -2x^2 + 8x$ en $y_2 = 2x - 36$.

b $y_1 = (x-10)^2 - 50$ en $y_2 = 10 - 5x$.

c $y_1 = -0{,}5(x-1)^2$ en $y_2 = (x-2)^2 - 3$.

Opgave 16

Sommige vergelijkingen zijn niet kwadratisch, maar kun je toch oplossen met behulp van de abc-formule en andere eerder geleerde technieken. Je gaat daar later dieper op in, maar hier alvast een voorproefje.

Los op:

a $x^3 + 2x^2 = x$

b $\left(x^2+2\right)^2 = 9$

Toepassen

Je hebt in deze paragraaf (en ook al eerder) gezien dat sommige kwadratische vergelijkingen geen reële oplossing hebben. Dat lijkt ook logisch want soms snijden de bijbehorende grafieken elkaar of de x-as niet.

Toch is het mogelijk om ervoor te zorgen dat elke kwadratische vergelijking oplossingen heeft. Je hebt er alleen bijzondere getallen voor nodig. Je noemt die getallen **imaginaire getallen**.

De eenvoudigste kwadratische vergelijking zonder reële oplossing is $x^2 = -1$.
Je kunt immers niet de wortel uit een negatief getal trekken!
Maar stel je nu eens voor dat er een getal i zou bestaan waarvoor $\mathrm{i}^2 = -1$. Dan wordt de vergelijking $x^2 = \mathrm{i}^2$ en heeft hij gewoon twee oplossingen: $x = -\mathrm{i} \vee x = \mathrm{i}$.

Het getal i is een imaginair getal en wiskundigen rekenen daar al eeuwen mee. Maar het getal i is geen reëel getal. Alleen als je wiskunde D kiest, krijg je er mee te maken...

Opgave 17: Imaginaire getallen

Bekijk in **Toepassen** hoe je de vergelijking $x^2 = -1$ kunt oplossen door het imaginaire getal i te gebruiken.

a Laat zien dat de oplossing van $x^2 = -4$ nu gelijk is aan $x = -2\text{i} \vee x = 2\text{i}$.

b Welke oplossing heeft de vergelijking $x^2 = -5$?

c En welke oplossing heeft de vergelijking $(x - 2)^2 = -9$?

Opgave 18: Imaginaire getallen en de abc-formule

Ook bij het toepassen van de abc-formule kun je door het imaginaire getal i te gebruiken vergelijkingen oplossen die geen reële oplossingen hebben.

a Laat zien dat de oplossingen van $x^2 + 4x + 5 = 0$ nu gelijk zijn aan $x = -2 - \text{i} \vee x = -2 + \text{i}$.

b Los op: $x^2 + 8x + 20 = 0$.

c Los op: $x^2 + 8x + 21 = 0$.

Testen

Opgave 19

Los de volgende vergelijkingen op. Geef waar nodig benaderingen in twee decimalen nauwkeurig

a $x^2 + 3x - 12 = 0$

b $x^2 + 5x + 6 = 0$

c $5x^2 + 3x = 15$

d $5x(x + 2) = 15$

Opgave 20

Gegeven is de kwadratische functie $y = -0{,}1x^2 - 2x + 1$.

a Bereken het snijpunt met de y-as.

b Laat met behulp van de discriminant zien, dat deze functie twee nulpunten heeft.
Bereken de snijpunten met de x-as in één decimaal nauwkeurig.

c Los op in twee decimalen nauwkeurig: $y = 2$.

d Bereken de snijpunten van de gegeven kwadratische functie en de lijn $y = -0{,}1x - 1$.

Practicum: Videoclip: abc-formule

In het engels spreek je van de ‘quadratic formula’, maar met een muziekje er onder is het leren werken met de abc-formule misschien toch wel aangenaam. De uitdrukking ‘square root’ betekent ‘wortel’, eigenlijk ‘vierkantswortel’. Maar verder spreekt de videoclip voor zich.

Bekijk de video

(Bron: **learningupgrade.com**)

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het oplossen van kwadratische vergelijkingen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.