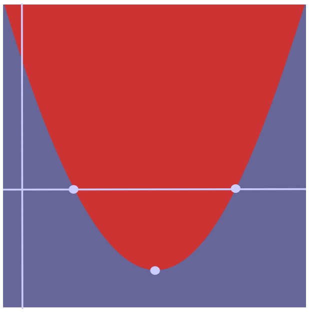
2.2 Nulpunten en top

Inleiding

Je weet al dat bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ parabolen horen met top (p,q).
Maar kwadratische functies kunnen ook een andere vorm hebben. En ook dan wil je kunnen bepalen welke top de bijbehorende parabool heeft en welke nulpunten.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- nulpunten en top berekenen van een kwadratische functie;
- de formule opstellen van een kwadratische functie bij geschikte gegevens.

Voorkennis

- werken met variabelen en met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- kwadraat afsplitsen en ontbinden in factoren, ook met de som-en-productmethode;
- bij kwadratische verbanden van de vorm $y = a(x - p)^2 + q$ een bijbehorende grafiek tekenen, een parabool met top (p,q).

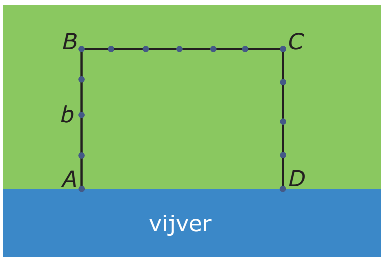
Verkennen

Opgave V1

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 100 m hekwerk. Zie de figuur. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB. Door b te veranderen kun je de oppervlakte veranderen.

Bekijk de applet: weiland tegen vijver

Hoe groot is de oppervlakte A van het landje maximaal?

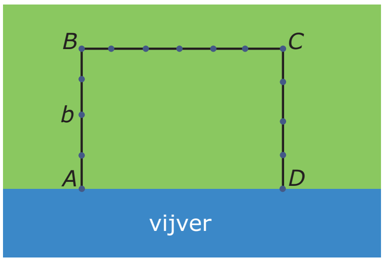


Figuur 2

Uitleg

Een boer heeft een stuk weiland naast een vijver. Hij wil naast de vijver een stuk grond afzetten met 200 m hekwerk. Zie de figuur. Langs de vijver komt geen hek.
b is de lengte van AB. Voor de oppervlakte van het weiland krijg je dan de formule:

$A = b(100 - 2b) = 100b - 2b^2$



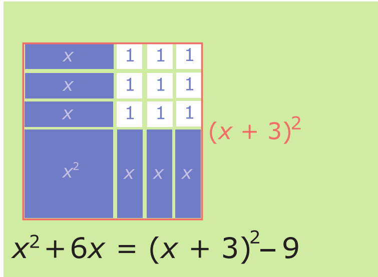
Figuur 3

Deze formule kun je kennelijk in twee vormen schrijven: een vorm met haakjes en een vorm die als hoogste macht van b een kwadraat heeft, maar ook nog een term heeft waarin b niet in het kwadraat staat. Zou er nu toch ook gewoon sprake zijn van een kwadratische functie? En zo ja, wat is dan het maximum van die functie?

Het blijkt dat je kwadratische functies in diverse vormen kunt schrijven. Bijvoorbeeld is $y = 2(x-3)^2 + 1 = 2x^2 - 12x + 19$ als je de haakjes uitwerkt. Dus ook een formule als $y = x^2 + 6x + 1$ is waarschijnlijk een kwadratische functie. Maar hoe weet je dat zeker en hoe kun je dan de top van de bijbehorende parabool bepalen?

Daarvoor moet je in $y = x^2 + 6x + 1$ een kwadraat afsplitsen. Hiernaast zie je hoe de uitdrukking $x^2 + 6x$ te herleiden is tot $(x+3)^2 - 9$. De formule $y = x^2 + 6x + 1$ herleid je daarmee tot $y = (x+3)^2 - 8$.

En nu weet je zeker dat er sprake is van een kwadratische functie en kun je de top van de bijbehorende parabool aflezen.



Figuur 4

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** dat een kwadratische functie meerdere vormen kan hebben.

a Laat zien, dat $y = 2(x-3)^2 + 1$ is te schrijven als $y = 2x^2 - 12x + 19$.

Je kunt in elke kwadratische functie van de vorm $y = a(x-p)^2 + q$ de haakjes uitwerken. Maar erg handig is dat niet, want nu kun je meteen de top van de parabool aflezen en na uitwerken kun je dat niet meer.
Het is dan ook veel nuttiger om een kwadratische functie zoals $y = x^2 + 8x + 2$ te kunnen herleiden tot de vorm waarin je de top kunt aflezen.

b Laat zien, dat $x^2 + 8x = (x+4)^2 - 16$.

c Schrijf nu de kwadratische functie $y = x^2 + 8x + 2$ in een vorm waarin je de top kunt aflezen.

De techniek die je zojuist hebt gebruikt heet ‘een kwadraat afsplitsen’. Deze techniek werkt ook als er mintekens in de formules voorkomen, alleen kun je dan niet altijd meer een figuur erbij tekenen. Splits een kwadraat af bij de volgende kwadratische functies.

d $y = x^2 + 6x - 12$

e $y = x^2 - 4x + 9$

f $y = x^2 + 5x$

Opgave 2

In de **Uitleg** kwam je de formule $A = 100b - 2b^2$ tegen. Ook deze formule kun je tot de vorm $A = a(b-p)^2 + q$ herleiden. Je begint dan met de term met b^2 voorop te schrijven en -2 buiten haakjes te halen.

a Laat zien, hoe je $A = 100b - 2b^2$ nu in de gewenste vorm krijgt.

b Bepaal de top van de bijbehorende parabool. Welke maximale oppervlakte heeft het weilandje?

Je hebt nu drie vormen voor dezelfde kwadratische functie.

c Met welke van die drie vormen kun je het snelst de snijpunten met de x-as berekenen?

Theorie en voorbeelden

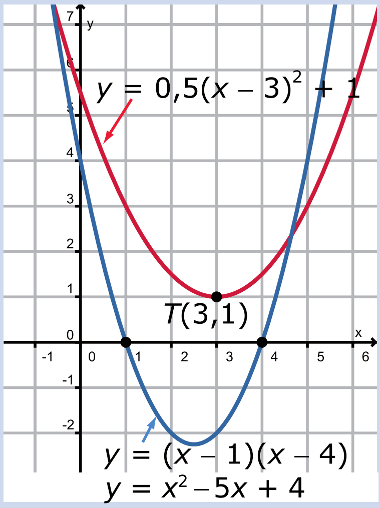
Om te onthouden

Bekijk de applet: kwadratische functies

Kwadratische functies kunnen verschillende vormen aannemen:

- $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ waarin (p,q) de **top** van de parabool is.
- $y = a(x - m)(x - n)$
- $y = ax^2 + bx + c$

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$ is de top van de parabool meteen uit de formule af te lezen. Het berekenen van de snijpunten met de x-as, de **nulpunten** doe je door de vergelijking $y = 0$ op te lossen.



Figuur 5

Bij kwadratische functies van de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ kun je juist de nulpunten meteen zien: $(m,0)$ en $(n,0)$. De top bepaal je dan door te bedenken dat hij op de symmetrieas ligt, dus een x-coördinaat heeft midden tussen m en n in.

Kwadratische functies van de vorm $y = ax^2 + bx + c$ breng je door **kwadraat afsplitsen** eerst in de vorm waarin je meteen de top kunt aflezen.

Voorbeeld 1

Bekijk de applet.

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = 2x^2 - 6x - 1$.

Bereken eerst de top van de bijbehorende parabool en daarna de exacte nulpunten.

Antwoord

Om de top te kunnen aflezen herleid je de formule tot de vorm $y = a \cdot (x - p)^2 + q$.
Dat doe je door een kwadraat af te splitsen.
Maar dan moet je eerst de a buiten haakjes halen.
Hier is dat de factor 2.
Je kunt zo te werk gaan:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 6x - 1 && \text{factor 2 buiten haakjes halen} \\ y &= 2\left(x^2 - 3x - 0{,}5\right) && \text{een kwadraat afsplitsen} \\ y &= 2\left((x - 1{,}5)^2 - 2{,}25 - 0{,}5\right) && \text{in de juiste vorm schrijven} \\ y &= 2(x - 1{,}5)^2 - 5{,}5 \end{aligned}$$

Nu je de formule hebt geschreven als $y = 2(x - 1{,}5)^2 - 5{,}5$ kun je aflezen dat de top $T(1{,}5; -5{,}5)$ is.
De exacte nulpunten bereken je door $2(x - 1{,}5)^2 - 5{,}5 = 0$ op te lossen. Dat doe je door terugrekenen.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

a Waarom wordt bij het kwadraat afsplitsen eerst een 2 buiten haakjes gebracht?

b Leg uit hoe je aan het getal -5,5 komt.

c Bereken nu zelf de exacte nulpunten van deze parabool. Controleer je antwoorden door ze te vergelijken met de parabool in de applet.

Opgave 4

Werk opnieuw met de applet in **Voorbeeld 1**.
Nu heb je een kwadratische functie met formule $y = 1{,}5x^2 + 3x - 4{,}5$. Stel dit in de applet in.

a Schrijf deze formule in een vorm waaruit je de top van de bijbehorende parabool kunt aflezen.

b Lees uit de bij a gevonden formule de top van de parabool af. Komt hij overeen met de top van de parabool in de applet?

c Bereken de exacte nulpunten van deze parabool vanuit de formule bij a. Controleer je antwoorden door ze te vergelijken met de parabool in de applet.

d Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe parabool instellen en dan door kwadraat afsplitsen de formule in de vorm schrijven waarin je de top kunt aflezen. Met behulp van die formule kun je dan de exacte nulpunten uitrekenen.
Oefen dit (met een medeleerling) tot je geen fouten meer maakt.

Opgave 5

Bekijk nu de formule $y = -0{,}5x^2 + 50x$.
De parabool die bij deze formule hoort krijg je met de applet in **Voorbeeld 1** niet in beeld. Om deze parabool te kunnen tekenen is het nuttig om eerst de top en de nulpunten te berekenen.

a Schrijf deze formule in een vorm waaruit je de top van de bijbehorende parabool kunt aflezen.

b Welk punt is nu de top van de parabool?

c Bereken de exacte nulpunten van deze parabool. Maak vervolgens een schets van de parabool.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet.

Bij een kwadratische functie hoort de formule $y = -0{,}2(x - 3)(x + 2)$.

Bepaal de nulpunten van de bijbehorende parabool en bereken de top.

Antwoord

Als de formule van een kwadratische functie een vorm heeft zoals die hierboven, kun je de nulpunten uit de formule aflezen. Immers $-0{,}2(x - 3)(x + 2) = 0$ kun je (na delen door -0,2) splitsen in $x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$ en dat geeft $x = 3 \vee x = -2$.
De nulpunten zijn daarom (-2,0) en (3,0).

De top van deze parabool kun je berekenen door gebruik te maken van de symmetrie. De symmetrieas is de verticale lijn die midden tussen beide nulpunten door de x-as gaat. Dus dat is de lijn $x = 0{,}5$.
Omdat de top van de parabool op de symmetrieas ligt kun je hem nu berekenen: de x-waarde van de top is 0,5 en die kun je in de formule invullen om de bijbehorende y-waarde te vinden.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.
Zorg er eerst voor dat de formule van het voorbeeld in de applet staat ingesteld.

a Ga na, dat de nulpunten die je uit de formule afleest overeen komen met die in de grafiek.

b Bereken de coördinaten van de top van de parabool.

c Je kunt de top van deze parabool ook vinden door haakjes uit te werken en een kwadraat af te splitsen. Laat zien dat dit dezelfde top oplevert.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2** en werk met de applet.
Stel in de applet de formule $y = (x - 2)(x - 5)$ in.

a Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Stel in de applet de formule $y = -2x(x - 5)$ in.

b Bereken de coördinaten van de top van de bijbehorende parabool.

Je kunt in de applet steeds weer een nieuwe formule van de vorm $y = a(x - m)(x - n)$ instellen en jezelf zo oefenen in het vinden van de top van de bijbehorende parabool.

c Oefen dit met behulp van de applet.

Opgave 8

Gegeven is de kwadratische functie met formule $y = 3x^2 + 42x + 120$.

a Door ontbinden in factoren kun je de formule schrijven in de vorm $y = a(x - m)(x - n)$. Laat dat zien en geef dan de nulpunten van deze functie.

b Laat zien, dat je de nulpunten van deze functie ook kunt vinden door een kwadraat af te splitsen.

Voorbeeld 3

Bekijk de applet.

Van een parabool is gegeven dat hij de nulpunten (1,0) en (3,0) heeft en gaat door het punt (0,6).

Bepaal de bijbehorende formule.

Antwoord

Omdat de nulpunten bekend zijn kun je de formule schrijven als $y = a(x - m)(x - n)$ met $m = 1$ en $n = 3$ (of andersom). Je krijgt dan $y = a(x - 1)(x - 3)$.

Substitueer nu de coördinaten van het punt (0,6) in deze vergelijking en je krijgt de juiste waarde van a, namelijk $a = 2$.

Je kunt nu de formule opschrijven.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 3** en werk met de applet.

a Experimenteer eerst met de applet. Probeer de juiste waarden voor m, n en a in te stellen.

b Bereken zelf, dat $a = 2$. Schrijf vervolgens de juiste formule op.

c De top van deze parabool kun je wel uit je figuur aflezen. Laat zien hoe je die door berekening kunt vinden.

Opgave 10

a Een parabool gaat door de punten (0,4), (-1,0) en (4,0). Stel een bijpassende formule op en bereken de coördinaten van de top.

b Een parabool gaat door (0,6) en heeft als top (1,8). Stel een bijpassende formule op en bereken de exacte nulpunten.

Verwerken

Opgave 11

Bereken van de volgende parabolen de coördinaten van de top.

a $y = x^2 + 8x + 2$

b $y = x^2 - 2x + 10$

c $y = 2x^2 + 10x - 8$

d $y = -4(x - 8)(x + 3)$

e $y = 0{,}5x^2 + x$

f $y = -x^2 + 6x - 4$

Opgave 12

Hieronder is telkens de formule van een kwadratische functie gegeven. Bereken de nulpunten en de extreme waarde.

a $y = 2x(x - 30)$

b $y = (x - 2{,}5)^2 - 1$

c $y = -0{,}5(x - 4)(x + 1)$

d $y = (x - 3)^2 + 1$

e $y = (4 - x)^2 - 7{,}5$

f $y = x^2 + 4x + 5$

g $y = 2x^2 + 16x + 24$

h $y = -2(x + 1)^2$

Opgave 13

Van een parabool is het punt $T(-1,-2)$ de top en is het punt $A(-10,0)$ één van beide snijpunten met de x-as.

Stel een formule op van deze parabool en bereken het snijpunt met de y-as.

Opgave 14

Van een kwadratische functie heeft de bijbehorende parabool het punt $T(1,2)$ als top en is het punt $A(3,0)$ één van beide snijpunten met de x-as.

Bereken het andere snijpunt met de x-as en stel drie verschillende formules op voor deze kwadratische functie.

Opgave 15

Van een kwadratische functie gaat de bijbehorende parabool door de punten (-10,0), (30,0) en (0,10).

Bereken de extreme waarde van deze kwadratische functie.

Opgave 16

Van een kwadratische functie heeft de formule de vorm $y = ax^2 + bx$. Deze functie heeft verder een maximum van 4 voor $x = 3$.

Bereken a en b.

Toepassen

Ook in de **economie** komen kwadratische functies voor. Bekijk dit (sterk vereenvoudigde) economische model maar eens.

Een sportclub verkoopt in zijn kantine koppen erwtensoep. De kantinebeheerder heeft gemerkt dat het aantal koppen soep dat ze dagelijks verkopen afhangt van de prijs die ze ervoor vragen: hoe duurder een kop soep, hoe lager het aantal koppen soep dat ze op een dag verkopen. Deze tabel laat dat zien.

Figuur 6

prijs per kop (in centen)	120	115	110	105	100
aantal verkocht per dag	100	110	120	130	140

Tabel 1

Als je hierbij een grafiek tekent, dan zie je dat het aantal verkochte koppen soep per dag q afhangt van de prijs p (in centen) volgens een lineair verband: q is een lineaire functie van p.
Ga na, dat $q = 340 - 2p$.

De kantinebeheerder bedenkt nu dat de opbrengst R kan worden berekent door de prijs per kop te vermenigvuldigen met het aantal verkochte koppen soep: $R = p \cdot q$.

Dit levert een kwadratische formule op: $R = p \cdot (340 - 2p)$.

Nu kan de kantinebaas berekenen bij welke prijs zijn opbrengst zo groot mogelijk is.

Opgave 17: Soepverkoop (1)

Bekijk het verhaal van de verkoop van erwtensoep in **Toepassen**.

a Leid zelf de lineaire formule voor q als functie van p af.

b Ga met behulp van de tabel na, dat de opbrengst stijgt als de prijs naar beneden gaat.

c Als de kantinebeheerder de prijs verder laat zakken worden er nog meer koppen soep verkocht. Blijft zijn opbrengst dan als maar stijgen?

d Waaraan zie je dat de opbrengst R een kwadratische functie van p is? En waaraan zie je dat de opbrengst een maximum heeft?

e Bereken het maximum van R. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk opbrengst wil hebben?

f Is het verstandig om een zo groot mogelijk opbrengst te willen hebben?

Opgave 18: Soepverkoop (2)

Nu ga je niet kijken naar een zo groot mogelijk opbrengst, maar naar een zo groot mogelijke winst.

a Wat is het verschil tussen opbrengst en winst?

Neem aan dat het maken van elke kop soep € 50 cent kost.

b Leg uit, waarom dan voor de winst geldt $W = (p - 50)(340 - 2p)$.

c Ook bij deze formule is de grafiek een parabool. Bepaal de twee nulpunten van deze parabool. Wat betekenen deze getallen voor de winst?

d Bereken het maximum van W. Welke prijs moet de kantinebeheerder vragen als hij een zo groot mogelijk winst wil hebben?

Testen

Opgave 19

Hieronder is telkens de formule van een kwadratische functie gegeven. Bereken de nulpunten en de extreme waarde.

a $y = -0{,}5(x - 6)^2 + 4$

b $y = 2(x + 4)(x - 5)$

c $y = x^2 - 6x - 7$

d $y = -0{,}01x^2 + 0{,}2x + 1{,}2$

Opgave 20

Een parabool gaat door de punten $(0, -6)$, $(2,0)$ en $(5,0)$.
Stel een bijpassende formule op en bereken de coördinaten van de top.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.