

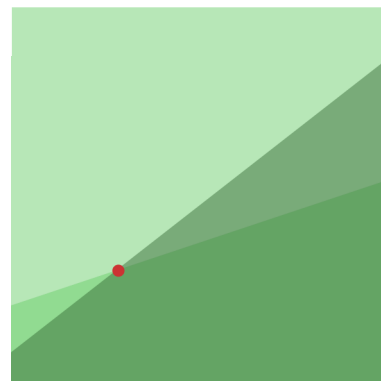
## 1.4 Lineaire modellen

### Inleiding

Soms heb je met meerdere lineaire verbanden te maken. Bijvoorbeeld als je bij het oplossen van sommige puzzels gebruik maakt van twee onbekenden en daar formules bij opstelt die je kunt herleiden tot lineaire functies.

Je noemt dat 'een lineair model opstellen'.

De bijbehorende lineaire vergelijking los je met de balansmethode op.



Figuur 1

### Je leert in dit onderwerp

- het snijpunt van twee lineaire functies berekenen;
- het nulpunt van een lineaire functie berekenen;
- bij vraagstukken die zich daartoe lenen formules opstellen die je kunt herleiden tot lineaire functies en daarmee het probleem oplossen.

### Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- werken met recht evenredige en lineaire verbanden;
- bij een lineair verband de richtingscoëfficiënt (of het hellingsgetal) berekenen en daarmee een formule opstellen.

### Verkennen

#### Opgave V1

In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob.

Hoe oud zijn Bob en Jeroen in 2006?

#### Opgave V2

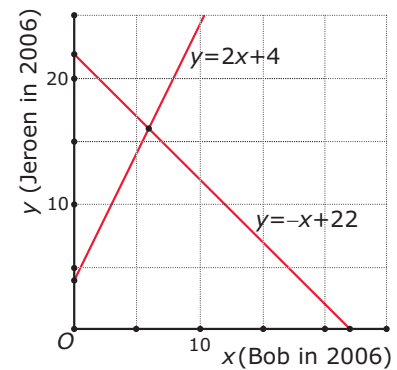
In 2006 zijn Bob en Jeroen samen 22 jaar oud. In 2010 is Jeroen twee keer zo oud als Bob. Je wilt hun leeftijden in 2006 weten. Hier zie je hoe je dit kunt aanpakken met behulp van lineaire verbanden.

- Laat  $x$  de leeftijd van Bob in 2006 zijn en  $y$  die van Jeroen in 2006. Welke formule kun je dan maken?
- Bedenk welke leeftijden Bob en Jeroen in 2010 hebben. Maak ook een formule voor de situatie in 2010.
- Beide formules kun je herleiden tot een vorm waarin  $y$  een functie van  $x$  is. Laat dat zien en teken vervolgens de bijbehorende grafieken in één assenstelsel.
- Hoe kun je nu hun leeftijden in 2006 bepalen?
- Vergelijk jouw oplossing bij de voorgaande opgave (als je die hebt gevonden) met de aanpak in deze opgave. Beschrijf voor- en nadelen van beide manieren van werken.

## Uitleg

Bij **Opgave V1** werd je een ‘probleem’ voorgeschoteld om op te lossen. Waarschijnlijk kwam je er met gewoon proberen wel redelijk snel uit, het is ook nog geen heel moeilijke puzzle. Maar ook werd je een meer systematisch aanpak getoond (in de tweede opgave) met behulp van lineaire verbanden. Als je een probleem kunt ‘vertalen’ naar lineaire formules dan zeg je wel dat je een **lineair model** hebt gemaakt.

Bij het probleem van de leeftijden van Bob en Jeroen worden twee variabelen ingevoerd:  $x$  voor Bob's leeftijd in 2006 en  $y$  voor Jeroen's leeftijd in 2006. Het lineaire model bestaat uit twee lineaire formules, te weten  $x + y = 22$  en  $y + 4 = 2(x + 4)$ .



**Figuur 2**

Bij deze formules kun je grafieken tekenen zoals die hiernaast. Het punt dat aan beide formules voldoet is het **snijpunt** van beide grafieken. Dat kun je uitrekenen door beide formules te herleiden tot  $y$  een functie is van  $x$ . In de figuur zie je deze lineaire functies staan. Voor het snijpunt geldt  $-x + 22 = 2x + 4$  omdat in dat punt de  $y$ -waarden van beide formules gelijk zijn. Deze **lineaire vergelijking** kun je oplossen met de balansmethode. Ga na dat je  $x = 6$  vindt. Door invullen van deze  $x$ -waarde in één van beide lineaire functies vind je ook de gewenste  $y$ -waarde. Het snijpunt van beide grafieken is  $(6, 16)$ .

En daarmee kun je antwoord geven op de vraag die werd gesteld.

### Opgave 1

In de **Uitleg** zie je hoe je snijpunt berekent van de grafieken bij twee lineaire formules.

- Bereken zelf het snijpunt van  $x + y = 22$  en  $y + 4 = 2(x + 4)$ .
- Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules  $x + y = 12$  en  $y - x = 13$ .
- Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules  $y = 6x - 1$  en  $y = 3x + 3$ .
- Bereken het snijpunt van de twee lijnen die horen bij de formules  $y = 2x$  en  $y = 3$ .
- Bereken het snijpunt van de lijn bij de formule  $2x + 5y = 10$  en de  $x$ -as.

### Opgave 2

Je wilt het volgende probleem oplossen.

Boer Brandwijk koopt kippen en geiten. 50 dieren kosten hem € 1000. Een kip kost € 1 en een geit kost € 51. Hoeveel kippen en hoeveel geiten koopt hij?

- Probeer het probleem op te lossen.  
Je kunt dit probleem oplossen door een lineair model op te stellen. Noem het aantal kippen  $x$  en het aantal geiten  $y$ .
- Welke twee lineaire formules kun je opstellen?
- Los het probleem verder op.  
Je hoeft bij het oplossen van dit probleem niet per sé twee variabelen in te voeren. Eigenlijk is één variabele wel genoeg. En misschien heb je bij a het probleem wel zonder variabelen in te voeren opgelost, zoveel mogelijkheden zijn er nu ook weer niet...
- Noem het aantal kippen dat boer Brandwijk koopt  $x$  en probeer het probleem met één vergelijking op te lossen.

## Theorie en voorbeelden

### Om te onthouden

Als je een probleem kunt 'vertalen' naar lineaire formules dan zeg je wel dat je een **lineair model** hebt gemaakt.

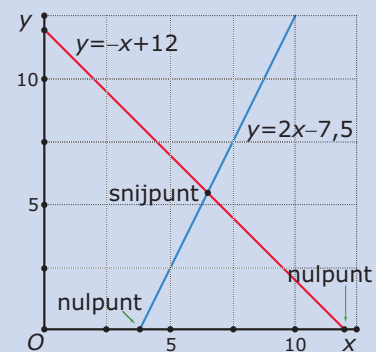
Vaak gaat het dan om het berekenen van een **snijpunt** van de grafieken bij twee formules.

Het snijpunt van de grafieken bij lineaire formules zoals  $x + y = 12$  en  $4x - 2y = 15$  is als volgt uit te rekenen:

- Eerst herleid je beide vergelijkingen tot  $y$  een functie is van  $x$ .
- Je krijgt dan twee formules van de vorm  $y = \dots$   
Die kun je aan elkaar gelijk stellen:  $-x + 12 = 2x - 7,5$ .
- Deze vergelijking los je op met de balansmethode. Je vindt:  $x = 6,5$ .
- De bijbehorende waarde van  $y$  vind je door de gevonden  $x$ -waarde in één van beide formules te substitueren.

Je krijgt als snijpunt van beide lijnen  $(6,5; 5,5)$ .

Ook een **nulpunt**, dus het snijpunt van de grafiek met de  $x$  as, van een lineaire formule is op te sporen door een vergelijking op te lossen. Het nulpunt van de formule  $y = 2x - 7,5$  vind je door  $2x - 7,5 = 0$  op te lossen. Dit geeft  $x = 3,75$ , dus het nulpunt is  $(3,75; 0)$ .



Figuur 3

### Voorbeeld 1

Bereken het snijpunt van de lijn  $l$  door  $(2,0)$  en  $(3,4)$  en de lijn  $k$  door  $(2,1)$  en  $(4,0)$ .

Antwoord

Stel eerst bijbehorende lineaire formules op.

- Bij lijn  $l$  vind je de formule  $y = 4x - 8$ .
- Bij lijn  $k$  vind je de formule  $y = -0,5x + 2$ .

Voor het snijpunt geldt  $4x - 8 = -0,5x + 2$ .

Met de balansmethode vind je  $x = \frac{20}{9}$ . Het snijpunt wordt na invullen van deze  $x$ -waarde  $(\frac{20}{9}; \frac{8}{9})$ .

### Opgave 3

In de **Theorie** kun je nalezen hoe je het snijpunt van de grafieken van twee lineaire formules berekent. Ook wordt besproken wat het nulpunt van een lineaire functie is en hoe je dit berekent.

- Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe het snijpunt van twee lineaire functies wordt berekend. Voer zelf de complete berekening uit en ga na, dat je hetzelfde krijgt.
- Bereken het snijpunt van de lijn  $l$  door  $(0,5)$  en  $(6,2)$  en de lijn  $k$  met bijbehorende formule  $2x - 5y = 10$ .
- Bereken het snijpunt van de lijn  $l$  door  $(0,0)$  en  $(2,1)$  en de lijn  $m$  door  $(0,4)$  en  $(4,0)$ .
- Bereken het nulpunt van de lijn  $l$  door  $(0,4)$  en  $(2,1)$ .

### Opgave 4

Twee kaarsen branden gelijkmatig op, hun lengte  $L$  in cm is een lineaire functie van de brandtijd  $t$  in uren. Op  $t = 0$  heeft kaars I een lengte van 35 cm en kaars II een lengte van 42 cm. 8 uur later zijn beide kaarsen nog 20 cm lang.

Hoeveel tijdsverschil zit er tussen de tijdstippen waarop deze kaarsen zijn opgebrand? Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

## Voorbeeld 2

Een goed voorbeeld van het werken met een lineair model is de keuze tussen een auto met een benzinemotor of een elektrische auto. Ga er van uit dat je zo'n auto least: dat is huren van een leasemaatschappij voor auto's.

Auto leasen		
Kosten in €	elektrisch	benzine
per maand	360	220
per km	0,07	0,12

Figuur 4

In de tabel zie je enkele gegevens uit 2020.

Van dezelfde auto is de benzineversie vergeleken met de elektrische versie.

Voor de benzineversie betaal je nog € 10 per maand aan wegenbelasting.

Hierbij kun je twee formules opstellen voor de kosten  $K$  als functie van het aantal maandelijks gereden kilometers  $a$ . Laat zien hoe dat gaat en bereken bij welk aantal gereden km per maand het rijden in de elektrische versie voordeliger is.

Antwoord

Leidt zelf af dat uit de gegevens volgt:

- Voor de benzineauto:  $K = 230 + 0,12 \cdot a$ .
- Voor de elektrische auto:  $K = 360 + 0,07 \cdot a$ .

Je kunt nu narekenen dat je volgens deze schatting vanaf ongeveer 2600 km per maand voordeliger uit bent met de elektrische versie.

## Opgave 5

In **Voorbeeld 2** zie je hoe iemand een lineair model opstelt bij de vraag wat voordeliger is, rijden op benzine of elektrisch rijden.

- Laat zien hoe je uit zijn aannames de formule voor de maandelijks kosten van de benzineauto kunt afleiden.
- Doe hetzelfde voor de jaarlijkse kosten van de elektrische auto.
- Bereken bij welk aantal jaarlijks gereden km de kosten voor de benzineauto even hoog zijn dan voor de elektrische auto. Laat zien dat het antwoord overeen komt met dat in het voorbeeld.

## Opgave 6

Als een ondernemer een nieuw product op de markt brengt, dan maakt hij kosten. Die kosten kun je vaak grofweg in twee categorieën verdelen:

- vaste kosten voor het ontwikkelen van het product en het opzetten van een productielijn en een magazijn;
- variabele kosten die afhangen van het aantal van die producten dat hij maakt, bijvoorbeeld materiaalkosten, loonkosten, en dergelijke.

Stel je voor dat een bedrijf een nieuwe lamp op de markt wil brengen. De vaste kosten zijn gecijferd op € 350.000. De kosten per geproduceerde lamp bedragen € 6,50. Het bedrijf gaat deze lampen verkopen voor € 11,50 per stuk.

- Noem het aantal verkochte lampen  $q$ . Welke formule kun je dan opstellen voor de totale kosten  $TK$ ?
- Welke formule kun je opstellen voor de totale opbrengst  $TO$ ?
- Bij beide formules horen rechte lijnen. Het snijpunt van deze twee lijnen noemen economen wel het 'break-even point'. Bereken dit punt. Waarom heeft het die naam?

## Opgave 7

Voor een muziekkuitvoering zijn 300 kaartjes verkocht. Kinderen betalen € 2,00 en volwassenen € 3,00. De totale inkomsten zijn in totaal € 787,00.

- Noem het aantal kinderen  $k$  en het aantal volwassenen  $v$ . Welke twee lineaire formules kun je dan afleiden?
- Schrijf deze formules zo, dat  $k$  een functie is van  $v$ .

- c Bij beide lineaire functies horen rechte lijnen. Bereken het snijpunt van deze twee lijnen.
- d Hoeveel kaartjes van elke soort zijn er verkocht?

## Verwerken

### Opgave 8

Gegeven zijn de lineaire functies  $y_1 = \frac{1}{4}x$  en  $y_2 = 2x + 5$ .

- a Teken de grafieken van beide functies in één figuur en geef daarin het snijpunt en alle nulpunten aan.
- b Bereken het exacte snijpunt van beide grafieken.

### Opgave 9

De lijn  $k$  gaat door  $(5,0)$  en  $(1,1)$ . De lijn  $l$  gaat door  $(0,5)$  en  $(3,0)$ .

- a Stel bij deze lijnen passende lineaire formules op.
- b Bereken het exacte snijpunt van beide lijnen.

### Opgave 10

Een bedrijf brengt een nieuwe keukenmachine op de markt. Deze keukenmachine gaat € 124,50 kosten. Om het apparaat te kunnen produceren heeft het bedrijf kosten gemaakt. Het ontwikkelen van het apparaat en het inrichten van een productielijn hebben € 310.000,00 gekost. Verder kost elk apparaat het bedrijf aan materiaal en loonkosten € 82,00.

- a Stel een formule op voor de totale kosten  $TK$  voor de productie van  $x$  van die keukenmachines.
- b Stel ook een formule op voor de totale opbrengst  $TO$  van de verkoop van  $x$  van die keukenmachines.
- c Hoeveel keukenmachines moet het bedrijf minstens verkopen om winst te kunnen maken?

### Opgave 11

Een vrachtauto weegt volgeladen met  $6,5 \text{ m}^3$  zand 14,5 ton. Nadat de chauffeur  $2,5 \text{ m}^3$  zand heeft bezorgd, weegt de vrachtauto met zand nog 10,75 ton.

Hoeveel weegt de lege vrachtauto?

### Opgave 12

De kantinebaas van een school koopt 500 pakken koeken. Hij neemt twee soorten: gevulde koeken van € 3,00 per pak en spritsen van € 2,00 per pak. Hij weet niet meer hoeveel pakken van elke soort hij heeft besteld, maar in zijn boekhouding kan hij zien dat de totale kosten € 1180,00 waren.

- a Noem het aantal pakken spritsen  $x$  en het aantal pakken gevulde koeken  $y$ . Welke twee formules kun je dan afleiden?
- b Bereken nu met de gevonden formules hoeveel pakken van elke soort de kantinebaas heeft ingekocht.

### Opgave 13

Een straalvliegtuig vertrekt om 11:00 uur uit Lissabon richting Amsterdam en vliegt met een gemiddelde snelheid van 800 km/h. Een propellorvliegtuig vertrekt om 12:15 uur uit Amsterdam richting Lissabon met een gemiddelde snelheid van 300 km/h. De afstand tussen Amsterdam en Lissabon is in vliegkilometers ongeveer 1850 km. (Neem aan dat beide plaatsen in dezelfde tijdzone zitten en dat beide routes ongeveer hetzelfde zijn.)

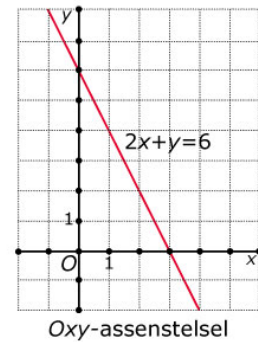
Bereken op welk tijdstip beide vliegtuigen elkaar passeren. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

## Toepassen

Een belangrijke toepassing van formules bij lijnen is de vlakke meetkunde. Je vat dan een lijn niet zozeer op als de grafiek van een lineaire functie, maar als meetkundig object. En je spreekt niet van een formule bij een lijn, maar van de **vergelijking van een lijn**. In dat geval moet je ook een gelijke schaalverdeling op beide coördinaatassen hebben!

In de meetkunde kun je de vorm  $y = ax + b$  wel gebruiken voor de vergelijking van een lijn in een  $Oxy$ -assenstelsel, maar op die manier kun je geen lijnen evenwijdig aan de  $y$ -as beschrijven. Daarom wordt vaak de vorm  $ax + by = c$  gebruikt. Denk er om dat in deze laatste vergelijking  $a$  niet de richtingscoëfficiënt van de lijn is!

Wat je in deze paragraaf hebt geleerd is het berekenen van snijpunten van lijnen. En je kunt al vergelijkingen van lijnen opstellen. Daarmee kun je bijvoorbeeld nagaan of lijnen door hetzelfde punt gaan, of punten op dezelfde lijn liggen, of lijnen evenwijdig zijn of loodrecht op elkaar staan.

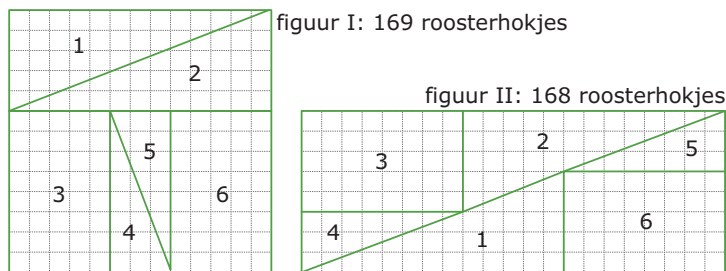


Figuur 5

### Opgave 14: Ontbrekend roosterhokje

Hierboven zie je nog eens hoe je lijnen in het platte vlak kunt beschrijven met vergelijkingen.

Hier zie je een klassieke puzzle waarbij kennis van lijnen en hun hellingsgetallen handig kan zijn. Bekijk de figuren I en II. Ze lijken de zijn samengesteld uit dezelfde vier rechthoekige driehoeken en twee rechthoeken. Toch is de oppervlakte van de figuur I gelijk aan 169 en die van figuur II gelijk aan 168. Hoe kan dat?



Figuur 6

- Controleer eerst dat de beide gegeven oppervlaktes inderdaad kloppen.
- En, weet je waar de fout zit?

### Opgave 15: Door één punt?

Onderzoek of deze drie lijnen door één punt gaan:

- Lijn  $k$  door  $(0,0)$  en  $(5,3)$ .
- Lijn  $l$  door  $(0,6)$  en  $(11,12)$ .
- Lijn  $m$  door  $(-7,-6)$  en  $(6,2)$ .

## Testen

### Opgave 16

Gegeven zijn de lijnen  $l$  door  $A(-2,5)$  en  $B(3,0)$  en  $m$  met formule  $2x - y = 5$ .

Bereken het snijpunt van  $l$  en  $m$ .

### Opgave 17

Moeder en dochter verschillen 29 jaar. Als je het dubbele van moeders leeftijd optelt bij die van de dochter, dan kom je precies uit op 100.

Hoe oud is de dochter?



© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: [f.spijkers@math4all.nl](mailto:f.spijkers@math4all.nl)

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij [a.f.otten@xs4all.nl](mailto:a.f.otten@xs4all.nl) een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.

---