

1.2 Lineaire functies

Inleiding

Hoog in de bergen is het meestal kouder dan vlak boven de zeespiegel. Welke verband is er eigenlijk tussen de hoogte waarop je zit en de temperatuur?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- wat een lineair verband tussen twee variabelen is en de richtingscoëfficiënt (of het hellingsgetal) en het snijpunt met de verticale as aflezen uit de formule;
- formules van de vorm $px + qy = r$ herleiden naar de vorm $y = \dots$
- (snel) grafieken tekenen bij lineaire verbanden.

Voorkennis

- werken met variabelen en verbanden tussen twee variabelen;
- werken met formules en grafieken, zoals een grafiek tekenen bij een formule;
- werken met recht evenredige verbanden, formule en grafieken erbij maken, de begrippen evenredigheidsconstante en richtingscoëfficiënt gebruiken.

Verkennen

Opgave V1

In het deel van de atmosfeer waarin het menselijk leven plaats vindt daalt de luchttemperatuur elke km dat je hoger komt gemiddeld met ongeveer $6,5\text{ }^\circ\text{C}$. Onder bepaalde weersomstandigheden kan met de formule $T = 25 - 0,0065h$ temperatuur T in graden celsius op een hoogte van h meter worden berekend. Dat is handig voor bijvoorbeeld bergbeklimmers, dan weten ze welke temperaturen ze tijdens de klim kunnen verwachten.

- Hoe ziet de grafiek van T afhankelijk van h er uit?
- Is er sprake van een recht evenredig verband tussen T en h ? Waarom?
- Bereken de temperatuur op 7500 meter hoogte.
- Op welke hoogte komt de temperatuur voor het eerst onder het vriespunt?

Opgave V2

Bij de GroenWinkel zijn de thuja's in de aanbieding voor € 4 en de jeneverbessen voor € 5. Een klant wil voor een heg struiken kopen en heeft daar € 150 voor begroot. Hoe kan de GroenWinkel hem van dienst zijn?

- Hoeveel thuja's levert de Groenwinkel als de klant 10 jeneverbessen koopt?
- Als het aantal jeneverbessen j en het aantal thuja's t is, welke formule kun je dan opschrijven voor de beschreven situatie?
- Is de bijbehorende grafiek een rechte lijn? Hoe kun je dat aan de formule zien?



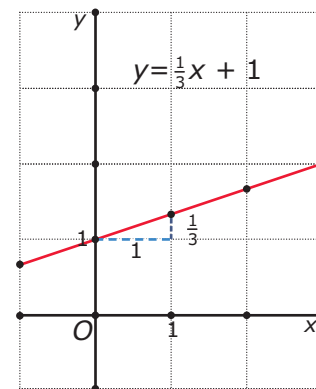
Figuur 2 thuja

Uitleg

De grafiek bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ is een rechte lijn. Want als je begint met de uitkomst voor $x = 0$ te berekenen ($y = 1$), dan wordt daarna elke keer dat je de x -waarde met 1 verhoogt, de y -waarde met $\frac{1}{3}$ verhoogd. En als je de x -waarde met 1 verlaagt, dan wordt de y -waarde met $\frac{1}{3}$ verlaagd. Dat getal $\frac{1}{3}$ is de coëfficiënt van x en bepaalt de richting van de lijn. Het is de **richtingscoëfficiënt** of ook wel het **hellingsgetal** van de lijn.

Een formule zoals $2x + 3y = 6$ kun je ook in de $y = \dots$ vorm schrijven. Je krijgt dan $y = -\frac{2}{3}x + 2$. Nu is de grafiek een rechte lijn door $(0, 2)$ en is de richtingscoëfficiënt $-\frac{2}{3}$.

Bij een formule die in de vorm $y = \dots$ (met op de stippetjes een uitdrukking met alleen x als variabele) staat, zeg je dat y een **lineaire functie** is van x .



Figuur 3

Opgave 1

Bekijk de **Uitleg**.

- Leg uit hoe je bij de formule $y = \frac{1}{3}x + 1$ snel een grafiek kunt tekenen.
- Teken snel een grafiek bij de formule $y = -0,25x + 4$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?
- Teken snel een grafiek bij de formule $y = 4x - 6$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?
- Teken snel een grafiek bij de formule $y = 5 - x$. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?
- Hoe kun je aan de richtingscoëfficiënt zien of de grafiek daalt of stijgt?
- Hoe ziet de grafiek er uit als de richtingscoëfficiënt 0 is? Geef een voorbeeld van een formule waarin dit zo is.

Opgave 2

Je ziet in de **Uitleg** ook de formule $2x + 3y = 6$.

- Laat zien hoe je deze formule kunt herleiden tot $y = -\frac{2}{3}x + 2$.
- Teken snel een grafiek bij deze formule.
- Herleid de formule $3x + 4y = 6$ tot y een lineaire functie is van x .
- Teken snel een grafiek bij de formule uit c. Welke richtingscoëfficiënt heeft deze rechte lijn?
- Bereken de richtingscoëfficiënt van de rechte lijn die hoort bij de formule $x - 2y = 10$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: Lineaire functie

Een variabele y is een **lineaire functie** van x als er een formule van de vorm

$y = a \cdot x + b$ met a en b willekeurige reële getallen.

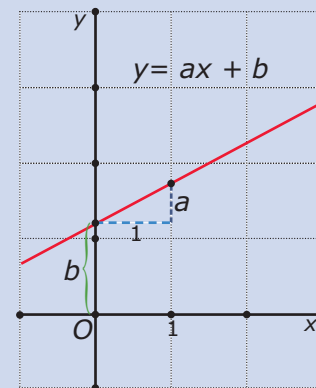
De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.

De waarden van a en b kun je nog kiezen. Het zijn ook variabelen, maar niet de variabelen van het assenstelsel. Zo'n hulpvariabele heet een **parameter**.

- a heet de **richtingscoëfficiënt** of het **hellingsgetal** van de lijn. Dit getal geeft de toename of afname van y als x met 1 wordt verhoogd. a bepaalt hoe schuin de lijn omhoog of omlaag loopt.
- b bepaalt het snijpunt met de y -as, dat is $(0, b)$.

Een formule van de vorm $px + qy = r$ kun je in de vorm $y = a \cdot x + b$ schrijven mits $q \neq 0$. Ook zo'n formule beschrijft een lineair verband tussen de variabelen x en y . Maar alleen als $q \neq 0$ is y een lineaire functie van x .

Bij elke rechte lijn in een x - y -assenstelsel hoort een **lineair verband** tussen x en y .



Figuur 4

Voorbeeld 1

Bekijk de applet: Lineaire functie

Gegeven is de formule $y = 1,5x + 3$. Omdat deze formule de vorm $y = a \cdot x + b$ heeft, is y een lineaire functie van x . De grafiek is een rechte lijn die je snel kunt tekenen omdat

- hij door het punt $(0, 3)$ moet gaan;
- het hellingsgetal 1,5 is, wat betekent dat het vergroten van de x -waarde met 1 een toename van de y -waarde met 1,5 tot gevolg heeft.

Zo kun je gemakkelijk meer punten van de rechte lijn vinden en hem tekenen.

Door in de applet de waarden van a en b te veranderen, maak je van andere lineaire functies de grafiek.

Opgave 3

Bekijk **Voorbeeld 1** en werk met de applet.

- Stel de juiste waarde van a en b in en maak de grafiek van $y = 2x + 1$.
- Waarom weet je zeker dat de grafiek van $y = 2x + 1$ door $(0, 1)$ gaat?
- Het punt $(100, 201)$ ligt op deze lijn. Ga dat na en bereken met behulp van de richtingscoëfficiënt van de lijn het punt dat hoort bij $x = 101$.

Opgave 4

Teken de grafieken van de volgende lineaire functies. Controleer je antwoorden met behulp van de applet.

- $y_1 = x - 3$
- $y_2 = -0,5x$
- $y_3 = -x + 1$
- $y_4 = 5 - 2x$
- $y_5 = 3$


Voorbeeld 2

Gegeven is de formule $3x + 2y = 12$. Laat zien dat y een lineaire functie van x is. Wat is de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn?

Antwoord

Je herleidt de gegeven formule als volgt:

$$\begin{array}{l}
 3x + 2y = 12 \\
 2y = -3x + 12 \\
 y = -1,5x + 6
 \end{array}$$


beide zijden $-3x$
beide zijden $/2$

Nu staat hij in de vorm die hoort bij een lineaire functie van x .

De richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn is $-1,5$.

Opgave 5

Schrijf de volgende formules zo, dat y een functie is van x . In welke gevallen is er sprake van een lineaire functie? Schrijf dan het hellingsgetal van de bijbehorende rechte lijn op.

- a** $x + y = 1$
- b** $2x - 3y = -2$
- c** $x \cdot y = 6$
- d** $y/x = 1$

Opgave 6

Laat zien, dat elke formule van de vorm $px + qy = r$ kan worden herleid tot een vorm waarin y een lineaire functie is van x . Bepaal de richtingscoëfficiënt van de bijbehorende rechte lijn.

Opgave 7

In de vorige opgave heb je de formule $px + qy = r$ herleid tot een lineaire functie van de vorm $y = \dots$. Dit lukt alleen als $q \neq 0$.

- a** Waarom is dat zo?
- b** Neem $p = 1$, $q = 0$ en $r = 2$. Welke formule krijg je? Welke punten in het assenstelsel voldoen aan deze formule?
- c** Leg uit waarom bij een formule zoals $x = 5,2$ een verticale lijn hoort. En waarom is hier geen sprake van een lineaire functie?
- d** Leg uit waarom bij een formule zoals $y = 5,2$ een horizontale lijn hoort. En waarom is hier wel sprake van een lineaire functie?

Voorbeeld 3

Bekijk de applet: Lineaire functie

Gegeven zijn de lineaire functies $y = 0,5x + b$. Voor welke waarde van de parameter b gaat de grafiek door het punt $(3,5)$?

Antwoord

Vul $x = 3$ en $y = 5$ in de gegeven formule in. Je vindt: $5 = 0,5 \cdot 3 + b$.

Dit levert op: $b = 3,5$.

Opgave 8

Gegeven zijn de lineaire functies $y = ax + 6$.

Voor welke waarde van de parameter a gaat de grafiek door het punt $(3,5)$?

Opgave 9

De punten $A(2,5)$, $B(6,5)$, $C(6,8)$ en $D(2,8)$ vormen een rechthoek. De functies $y = ax + 1$ hebben als grafiek een rechte lijn.

Voor welke waarden van de parameter a gaat de grafiek door een zijde en/of een hoekpunt van rechthoek $ABCD$?

Verwerken

Opgave 10

Vier lineaire functies zijn gegeven door $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -2x + 1$, $y_3 = 2x + 5$ en $y_4 = -0,5x + 5$.

- Teken de vier bijbehorende rechte lijnen in één assenstelsel.
- Bij welke van deze lineaire functies hoort een rechte lijn die evenwijdig loopt met die van $y_1 = 2x + 1$? Hoe kun je dat aan de formule zien?
- Wat valt op aan de twee lijnen die horen bij y_3 en y_4 ?

Opgave 11

In mijnen geldt als vuistregel dat de temperatuur $0,025$ °C stijgt voor elke meter die je in de mijn afdaalt. Op een bepaald moment is de buitentemperatuur bij de ingang van een mijnschacht vast op 20 °C.

- Welke temperatuur verwacht je dan op een diepte van 300 meter?
- Stel bij de buitentemperatuur van 20 °C een formule op voor T (de temperatuur in de mijn in °C) afhankelijk van d (de diepte in meters).
- Een mijnwerker meet op dat moment een temperatuur van $34,3$ °C. Hoe diep zit hij?



Figuur 5 Black Diamond Mine

- Op een ander tijdstip meet een mijnwerker die op 684 meter diepte zit een temperatuur $37,8$ °C.
- Hoeveel bedraagt op dat tijdstip de buitentemperatuur?

Opgave 12

Bij de lijnen l , m en n horen de formules:

- bij l : $4x + 6y = 21$;
- bij m : $x - 7y - 70 = 0$;
- bij n : $5x - 4y + 25 = 75$.

Bereken van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt en teken ze in één assenstelsel.

Opgave 13

Een kaars met een lengte van 40 cm brandt elk uur nadat hij is aangestoken 0,125 cm op. De lengte L (in cm) van deze kaars hangt af van de brandtijd t (in uur).

- Welke formule geldt voor L afhankelijk van t ? Waarom is hier sprake van een lineaire functie?
- Welke vergelijking hoort er bij de vraag: "Na hoeveel uur is de kaars opgebrand?"?
- Los deze vergelijking op en geef antwoord op de bij b gestelde vraag.

Opgave 14

Door de formule $y = 2x + b$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

- Als $b = 5$ krijg je één van die functies. Teken de bijbehorende grafiek.
- Voor welke waarde van de parameter b gaat de grafiek door het punt $(7,12)$?
- Voor welke waarde van de parameter b is $(12,0)$ het snijpunt van de grafiek met de x -as?

Opgave 15

Door de formule $y = ax + 10$ is een hele serie lineaire functies gegeven.

- Door welk punt gaan alle grafieken van deze functies?
- Voor welke waarde van de parameter a gaat de grafiek door het punt $(7,12)$?
- Voor welke waarde van de parameter a is zo'n functie evenwijdig met de lijn die hoort bij de formule $x + 2y = 4$?

Toepassen

Ieder huishouden verbruikt energie. Meestal betreft dat gas en elektra. De prijs daarvoor hangt natuurlijk af van de leverancier en bestaat uit twee gedeeltes: een prijs voor het verbruik en een vaste leveringsprijs, die het vastrecht wordt genoemd. In huis heb je meters die het verbruik registreren. Hiernaast zie je een elektriciteitsmeter.

Bij een bepaalde energieleverancier betaal je bijvoorbeeld:

- voor het verbruik van gas:
 - een vastrecht van € 45,00 per jaar en daar boven op € 0,38 per verbruikte m^3
- voor het verbruik van elektriciteit:
 - een vastrecht van € 52,00 per jaar en daar boven op € 0,07 per verbruikte kWh (kiloWattuur)



Figuur 6 elektriciteitsmeter

Opgave 16: Energieverbruik

Hierboven vind je enkele gegevens over de kosten voor het energieverbruik van huishoudens.

- Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer $1950 m^3$ gas per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?
- Een gemiddeld vierpersoons huishouden verbruikt ongeveer 4800 kWh elektriciteit per jaar. Hoeveel moeten ze daarvoor bij deze leverancier betalen?
- Leid uit de tekst een formule af voor de kosten K_g per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte m^3 gas g . Leid ook een formule af voor de kosten K_e per jaar afhankelijk van het aantal verbruikte kWh elektriciteit e .

Jordi woont op een studentenkamer en verbruikt jaarlijks ongeveer $430 m^3$ gas en 1100 kWh elektriciteit. Zijn vriendin Amira heeft een eigen appartement en verbruikt jaarlijks ongeveer $680 m^3$ gas en 1600 kWh elektriciteit. Jordi trekt bij Amira in. Hun gezamenlijk verbruik is nu ongeveer $760 m^3$ gas en 1840 kWh elektriciteit. Ze zijn allebei bij deze energieleverancier.

- Zijn ze nu goedkoper uit?

Opgave 17: Waterverbruik

Bij een bepaalde waterleidingmaatschappij betaal je € 1,20 per kubieke meter water. Daarnaast betaal je ook een bedrag voor vaste lasten zoals administratie en onderhoud van de leidingen. Die vaste lasten bedragen bij deze maatschappij € 40,00 per jaar.

- Je verbruikt per jaar a m³ water. Waarom zijn de kosten voor het waterverbruik exclusief de vaste lasten recht evenredig met a ?
- Welke formule geldt voor de totale jaarlijkse kosten voor het waterverbruik K inclusief de vaste lasten?
- Iemand moet over 2010 voor het waterverbruik € 810,40 betalen. Hoeveel m³ water heeft hij dat jaar verbruikt.

Testen

Opgave 18

Eén Russische roebel (₽) is op zeker moment gelijk aan € 0,011.
Als je Russische roebels wilt kopen dan betaal je nog € 6,50 per transactie.

- Hoeveel kost 250?
- Hoeveel roebel kun je voor € 250 kopen?
 E is het aantal euro's dat je voor R roebels betaalt.
- Waarom is E een lineaire functie van R ?
Schrijf een bijpassende formule op.



Figuur 7

Opgave 19

In welke van de volgende gevallen is y een lineaire functie van x ? Stel in dat geval een bijpassende formule op.

- De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door (2,5) en door (6,10).
- De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door (2,5) en door (6,15).
- De grafiek van y afhankelijk van x gaat door (0,0), (1,2) en door (2,8).
- De grafiek van y afhankelijk van x is een rechte lijn door (2,8) en evenwijdig met de lijn $2x + 5y = 10$.



© 2022

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
