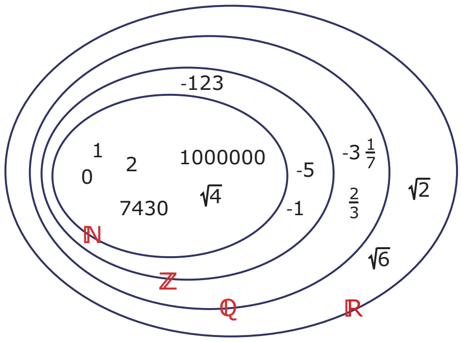
5.7 Soorten getallen

Inleiding

Je hebt inmiddels met allerlei soorten getallen kennis gemaakt: decimale getallen, gehele getallen, breuken, negatieve getallen, machten, wortels en misschien al het getal π. Hoog tijd om dit even overzichtelijk op een rijtje te zetten.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- allerlei soorten getallen herkennen en er overzicht over krijgen.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen;
- machten en wortels uitrekenen en de juiste rekenvolgorde hanteren;
- werken met de wetenschappelijke methode.

Verkennen

Opgave V1

In deze videoclip hoor en zie je verschillende soorten getallen voorbij komen. Schrijf op welke soorten getallen er voor komen en waaraan je ze herkent.

Bekijk videoclip: Soortengetallen.

Uitleg 1

De wiskunde kan niet zonder getallen...
Om te beginnen zijn daar de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, 5, ..., 7420, ... Omdat in onze tientallige schrijfwijze een nul nodig is wordt het getal 0 meestal ook een natuurlijk getal genoemd:
$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$

Doe je niks anders dan optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen, dan heb je aan de natuurlijke getallen genoeg. Maar ja, er worden ook getallen afgetrokken, gedeeld en er wordt wortel getrokken...

Om getallen altijd te kunnen aftrekken heb je ook negatieve getallen nodig, want anders kun je bijvoorbeeld $5 - 9$ niet uitrekenen. Dus eerst voeg je -1, -2, -3, etc., toe aan de natuurlijke getallen. Je krijgt dan de gehele getallen:
$\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

Om getallen altijd te kunnen delen heb je ook breuken nodig, want anders kun je bijvoorbeeld 2/3 niet uitrekenen. Voeg je de breuken toe aan de gehele getallen, dan krijg je de rationale getallen $\mathbb{Q}$ (‘ratio’ betekent ‘breuk, verhouding’).
Die naam is niet zo gek, want ook gehele getallen kun je als breuk schrijven. Bijvoorbeeld: $3 = \frac{3}{1}$.

En hiermee is het nog niet afgelopen...

Opgave 1

Bekijk **Uitleg 1**. De Oude Grieken kenden alleen de natuurlijke getallen. Cijfers en het tientallig stelsel was ze onbekend, ze gebruikten letters om getallen weer te geven. De Romeinen gebruikten ook letters om getallen weer te geven, hoewel ze ‘Romeinse cijfers’ genoemd worden. Tot ver in de Middeleeuwen waren deze Romeinse cijfers in Europa de enige manier om getallen weer te geven.
De Romeinse cijfers bestaan uit de symbolen I voor 1, V voor 5, X voor 10, L voor 50, C voor 100, D voor 500 en M voor 1000.
De eerste tien getallen zijn I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX en X.

a Hoe wordt 4 voorgesteld in Romeinse cijfers?

b Hoe zou 24 er in Romeinse cijfers uitzien?

c Welk getal is MDCCXXIX? En hoe ziet 1999 er uit?

De Romeinen hadden geen symbool voor 0 omdat hun systeem voor getallen geen positiestelsel is. Het tientallig stelsel dat we nu gebruiken is wel een positiestelsel.

d Probeer uit te leggen wat het verschil is.

e Wat is het nadeel van de Romeinse cijfers?

f Waarom is bij een positiestelsel een 0 nodig?

Opgave 2

Toen in West-Europa na de Middeleeuwen het tientallig stelsel werd ingevoerd, werden de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 de basis van onze getallen.

a Kun je bedenken in welke situaties negatieve getallen belangrijk zijn?

Breuken waren altijd verhoudingen van gehele getallen, vandaar al die schrijfwijzen ervoor.

b Hoe schrijf je een breuk als decimaal getal?

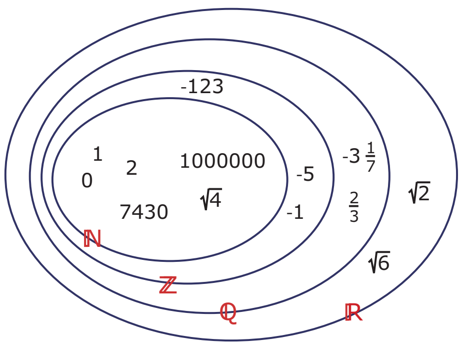
c Kun je elk rationaal getal als breuk schrijven? En als decimaal getal?

d Zijn er nog andere getallen dan de rationale getallen?

Uitleg 2

Inmiddels heb je ook leren worteltrekken. En dat levert twee problemen op...

Getallen als $\sqrt{2}$ kun je niet als breuk schrijven, het zijn irrationale getallen.
(Al in de Griekse Oudheid is dit bewezen.)
Daarom kun je dergelijke wortels alleen benaderen, nooit exact berekenen. Je moet dus aan de rationale getallen nog deze irrationale getallen toevoegen. Je krijgt dan de reële getallen. Dit zijn de getallen waar je eigenlijk altijd mee werkt. Alle reële getallen samen stel je voor door $\mathbb{R}$.



Figuur 2

Het tweede probleem betreft getallen als $\sqrt{-1}$. Dit zijn geen reële getallen. Hiervoor zijn de complexe getallen in het leven geroepen, maar voorlopig krijg je daar niet mee te maken...

Hier zie je de voor jou belangrijke soorten getallen in één figuur.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**. Je ziet dat wortels vaak geen rationale getallen zijn.

a Geef een voorbeeld van een wortel die wel een rationaal getal is, maar geen geheel getal.

Het getal $\sqrt{2}$ is tot in miljoenen decimalen berekend: $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488....$ Maar er is geen regelmaat in de decimalen te vinden en dus is het getal nooit precies bekend.

b Wat is het kenmerkende verschil tussen irrationale getallen en rationale getallen?

c Hoeveel decimalen van $\sqrt{2}$ geeft jouw rekenmachine? Schrijf ze op.

d Kun je op met je rekenmachine meer decimalen van $\sqrt{2}$ vinden? Hoe dan?

Opgave 4

Wortels uit een negatief getal, wat moet je daar nou mee?

a Waarom is de wortel uit een negatief getal geen reëel getal?

Stel je nu eens voor dat er een getal i is waarvoor geldt: $i^2 = -1$.

b Wat is $\sqrt{-1}$ dan?

c Wat is $\sqrt{-4}$ nu? En $\sqrt{-2}$?

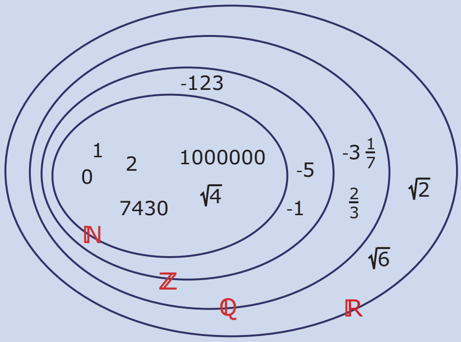
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Er bestaan allerlei soorten getallen:

- **natuurlijke getallen**: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$
- **gehele getallen**: $\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- **rationale getallen**: $\mathbb{Q}$ bestaat uit alle getallen die je als breuk kunt schrijven, dus ook de gehele getallen
- **reële getallen**: $\mathbb{R}$ en dat zijn voorlopig alle getallen samen.

Getallen als $\sqrt{-1}$ zijn geen reële getallen. Dit zijn complexe getallen, maar voorlopig krijg je daar niet mee te maken...



Figuur 3

Voorbeeld 1

Geef van elk van de volgende getallen aan tot welke soort ze behoren.

- $-2{,}25$
- $-\frac{12}{4}$
- $-\sqrt{53}$
- $\sqrt{\frac{108}{3}}$

Antwoord

Al deze getallen zijn reële getallen.

- $-2{,}25$ is een rationaal getal, maar geen geheel getal
- $-\frac{12}{4} = -3$ en is dus een geheel getal, maar geen natuurlijk getal
- $-\sqrt{53}$ is een irrationaal getal
- $\sqrt{\frac{108}{3}} = 6$ en dus een natuurlijk getal

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 1**.

a Teken een diagram zoals in **Uitleg 2** en plaats daarin de getallen uit het voorbeeld.

b Teken een getallenlijn waarop al deze getallen voorkomen en plaats ze er in de juiste volgorde op.

Voorbeeld 2

Van een rationaal getal als $\frac{2}{7}$ kun je alle decimalen exact weten omdat bij het uitvoeren van de deling de decimalen zich gaan herhalen. (Je kunt natuurlijk al die nullen aan het begin van elk getal wel weglaten.)

Je ziet dat er herhaling optreedt, dus $\frac{2}{7} = 0,\underline{28574}$.
Elk rationaal getal heeft zo ofwel een eindig aantal decimalen, ofwel de decimalen gaan zich herhalen. Daarom hoef je rationale getallen niet te benaderen.

2 / 7 = 0,285742...
0
2,0
1,4
0,60
0,56
0,040
0,035
0,0050
0,0049
0,00010
0,00007
0,000030
0,000028
0,0000020

Figuur 4

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**. Elk rationaal getal heeft ofwel een eindig aantal decimalen, ofwel de decimalen gaan zich herhalen.

a Schrijf $\frac{3}{16}$ exact als decimaal getal.

b Schrijf $\frac{2}{13}$ exact als decimaal getal.

c Als de noemer van de breuk een priemgetal is, dan is het niet altijd gemakkelijk om de herhaling van de decimalen te vinden. Probeer maar eens een paar breuken zoals $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, of $\frac{1}{31}$ als exact decimaal getal te schrijven.

Opgave 7

Nu heb je een getal als $0,\underline{1234}$. Je wilt bepalen welke breuk hier bij hoort. Noem het getal g

a Er herhalen zich vier decimalen. Hoeveel is dus $10000 \cdot g$?

b Je weet dat $10000 \cdot g - 1 \cdot g = 9999 \cdot g$. Welk gehele getal is $9999 \cdot g$?

c Schrijf nu g als breuk.

d Schrijf op dezelfde manier $12,\underline{34}$ als breuk.

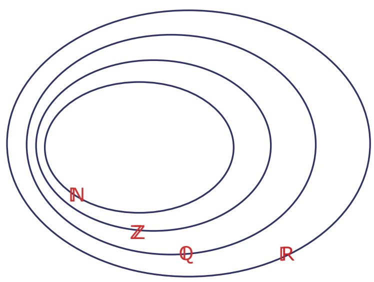
Verwerken

Opgave 8

Gegeven zijn de volgende getallen: -1,5, $\sqrt{16}$, -$\sqrt{5}$, 0, $\frac{7}{3}$, $\sqrt{-4}$, $1,\underline{15}$ en -$\frac{12}{4}$.

a Maak een overzicht van de verschillende soorten getallen zoals dat hiernaast en plaats de gegeven getallen er in.

b Zet de gegeven getallen op de juiste plaats op de getallenlijn.



Figuur 5

Opgave 9

Schrijf $\frac{7}{31}$ als exact decimaal getal.

Opgave 10

Schrijf $5{,}1\underline{63}$ als breuk.

Opgave 11

Als je twee natuurlijke getallen optelt, dan krijg je altijd weer een natuurlijk getal. Je zegt daarom wel dat de natuurlijke getallen gesloten zijn voor optellen.

a Zijn de natuurlijke getallen ook gesloten voor aftrekken?

b Zijn de gehele getallen gesloten voor aftrekken?

c Zijn de gehele getallen gesloten voor vermenigvuldigen? En voor delen?

d Welke soort getallen is gesloten voor worteltrekken?

Toepassen

Er zijn nog veel meer soorten getallen. Bijvoorbeeld:

- De even getallen zijn alle gehele getallen die een veelvoud zijn van 2.
- De oneven getallen zijn alle gehele getallen die geen veelvoud zijn van 2.
- De drievouden zijn alle gehele getallen die een veelvoud zijn van 3.
- De priemgetallen zijn alle natuurlijke getallen vanaf 2 die niet deelbaar zijn door andere getallen dan 1 en zichzelf.

Opgave 12: Veelvouden

a Hoe noem je de veelvouden van 2?

b Zet de natuurlijke getallen vanaf 0 tot en met 99 op een rij en streep alle veelvouden van 2 weg maar 2 zelf niet. Welke getallen houd je over?

c Streep nu de veelvouden van 3 ook weg maar 3 zelf niet. Hoeveel getallen houd je nu over?

d Waarom is het weinig werk om nu de veelvouden van 4 weg te strepen?

e Streep nu de veelvouden van 5 (behalve 5) weg. Daarna die van 7 (behalve 7) en zo steeds verder met het eerstvolgende getal dat nog niet is weggestreept. Wat houd je over?

f Elk natuurlijk getal is een priemgetal of een veelvoud van een priemgetal. Klopt die uitspraak?

Opgave 13: Perfecte getallen

Het getal 6 heeft behalve zichzelf nog drie andere delers, namelijk 1, 2 en 3. En als je die delers optelt, dan krijg je precies 6. Een getal met de eigenschap dat het gelijk is aan de som van zijn delers (behalve het getal zelf) heet een ‘perfect getal’. Perfecte getallen zijn behoorlijk zeldzaam, tot nu toe zijn er slechts 44 gevonden.

a Laat zien dat 28 het volgende perfecte getal is.

Perfecte getallen zijn moeilijk te vinden. Lang hebben wiskundigen gedacht dat ze allemaal de vorm $2^n \cdot \left(2^{n+1} - 1\right)$ zouden hebben.

b Ga na, dat dit klopt voor $n = 1$ en voor $n = 2$.

c Voor $n = 3$ krijg je geen perfect getal. Ga dat na.

d Maar voor $n = 4$ klopt het weer wel. Welk perfecte getal krijg je dan? Kun je er nog meer vinden?

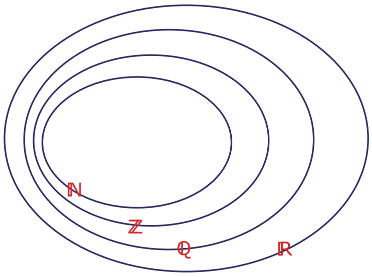
Testen

Opgave 14

Gegeven zijn de volgende getallen: -10,7, $\sqrt{15}$, -$\sqrt{19}$, 0, $3\frac{2}{3}$, $\sqrt{64}$, 3,$\underline{12345}$ en $\frac{13}{4}$.

a Maak een overzicht van de verschillende soorten getallen zoals dat hiernaast en plaats de gegeven getallen er in.

b Zet de gegeven getallen op de juiste plaats op de getallenlijn.



Figuur 6

Opgave 15

Schrijf $\frac{5}{19}$ als exact decimaal getal.