5.5 Meneer Van Dalen

Inleiding

Je weet al dat je bij het rekenen een bepaalde volgorde in acht moet nemen. Maar nu komen daar machten en wortels nog bij. En die gaan voor...

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- werken met de juiste rekenvolgorde.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen;
- het begrip macht en machten uitrekenen;
- het begrip derdemachtswortel en derdemachtswortels uitrekenen.

Verkennen

Opgave V1

'Meneer Van Dalen Wacht Op Antwoord' was vroeger een ezelsbruggetje om de voorrangsregels voor het rekenen te onthouden: eerst Machten, dan Vermenigvuldigen, daarna Delen, vervolgens Worteltrekken, dan Optellen en tenslotte Aftrekken.

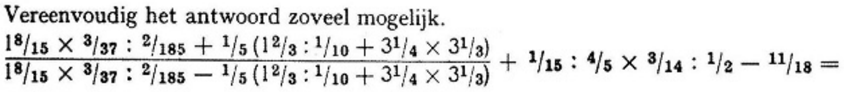
a Bereken $144 / 4 \times 3 - 4 + 2^3$ door deze ezelsbrug letterlijk op te volgen.

b Wat maakt je rekenmachine van $144 / 4 \times 3 - 4 + 2^3$?

c Laat zien hoe je dit tegenwoordig uitrekent.

Opgave V2

In de **Wikipedia: Bewerkingsvolgorde** staat deze rekenopgave uit een rekenboekje uit 1958.



Vereenvoudig het antwoord zoveel mogelijk.

$$\frac{1\,{}^{8}/_{15} \times {}^{3}/_{37} : {}^{2}/_{185} + {}^{1}/_{5}\,(1\,{}^{2}/_{3} : {}^{1}/_{10} + 3\,{}^{1}/_{4} \times 3\,{}^{1}/_{3})}{1\,{}^{8}/_{15} \times {}^{3}/_{37} : {}^{2}/_{185} - {}^{1}/_{5}\,(1\,{}^{2}/_{3} : {}^{1}/_{10} + 3\,{}^{1}/_{4} \times 3\,{}^{1}/_{3})} + {}^{1}/_{15} : {}^{4}/_{5} \times {}^{3}/_{14} : {}^{1}/_{2} - {}^{11}/_{18} =$$

Figuur 2 Bron: Wikipedia

Een leuke uitdaging: Wat komt er uit als je de ezelsbrug uit de vorige opgave hanteert?

Uitleg

'Meneer Van Dalen Wacht Op Antwoord' was vroeger een ezelsbruggetje om de voorrangsregels voor het rekenen te onthouden: eerst Machten, dan Vermenigvuldigen, daarna Delen, vervolgens Worteltrekken, dan Optellen en tenslotte Aftrekken. Tegenwoordig wordt die volgorde niet langer strikt gehanteerd, maar toch zijn er (vanwege de moderne rekenapparatuur) een aantal duidelijke afspraken.

Bij het rekenen moet je deze rekenvolgorde hanteren:

- H: eerst doe je wat binnen haakjes staat;
- MW: vervolgens machten en wortels van links naar rechts;
- VD: daarna vermenigvuldigen en delen van links naar rechts;
- OA: tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Je ziet dat machten en wortels gelijkwaardig zijn, dat hetzelfde geldt voor vermenigvuldigen en delen en optellen en aftrekken. Met haakjes kun je de volgorde beïnvloeden: wat daarbinnen staat doe je eerst.

Ezelsbrug nodig? Bijvoorbeeld: 'Heel Mooi Weer VanDaag Op Ameland' als je dit gebruikt als H-MW-VD-OA.

Opgave 1

Bekijk de berekening $8 + \sqrt{9} \cdot 2^3$.

a In deze berekening komen vier bewerkingen voor. In welke volgorde moet je die uitvoeren?

b Bereken de uitkomst.

c Door haakjes toe te voegen, verander je de rekenvolgorde. Wat komt er bijvoorbeeld uit $\left(8 + \sqrt{9}\right) \cdot 2^3$?

Opgave 2

In de volgende berekeningen zijn de voorrangsregels niet goed toegepast. Verbeter ze.

a $2 \cdot 3^3 = 6^3 = 216$

b $\sqrt{36} \big/ 4 = \sqrt{9} = 3$

c $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25} = 5$

d $36 \big/ 4 + 2^3 = 36 \big/ 4 + 8 = 36/12 = 3$

e $6^5 - 6^3 = 6^2 = 36$

f $(2+3)^4 = 2^4 + 3^4 = 16 + 81 = 97$

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bij rekenen gelden deze **voorrangsregels**:

1. Eerst uitrekenen wat tussen haakjes staat.
2. Dan machten en wortels van links naar rechts.
3. Dan vermenigvuldigen en delen van links naar rechts.
4. Tenslotte optellen en aftrekken van links naar rechts.

Houd er wel rekening mee, dat haakjes soms zijn verstopt: $\sqrt{5^2} = \sqrt{(5^2)}$ en $\frac{6}{2+3} = 6/(2+3)$.

Figuur 3

Voorbeeld 1

Bereken: $2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot (2+6) \big/ 2^3$.

Antwoord

$2 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot 3 - 4 \cdot (2+6) \big/ 2^3 =$
$= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 8/8 =$
$= 8 + 6 - 32/8 =$
$= 14 - 4 = 10$

Opgave 3

Let op de voorrangsregels en bereken:

a $4 \cdot 2^5 - 400 \big/ \sqrt{16}$

b $(2^3 + 3^2)^2 \big/ 17 - \sqrt[3]{64}$

c $\left(2 \cdot \sqrt[3]{2}\right)^3$

Opgave 4

Door op de goede plaats haakjes te zetten krijg je een correcte berekening.

a $3^4/8 - 5 = 27$

b $2^5 - \sqrt{256}/2^3 = 2$

c $3 \cdot 3^2 \big/ \sqrt{49} - 4 = 27$

Voorbeeld 2

Je hebt gezien dat je de rekenvolgorde Haakjes-MachtenWortels-VermenigvuldigenDelen-OptellenAftrekken moet hanteren. Maar soms kun je door een bijzondere schrijfwijze te gebruiken de volgorde wijzigen.
Drie bekende voorbeelden zijn:

- de lange breukstreep: $\frac{6 \cdot 2}{5-3} = \frac{12}{2} = 6$ (aftrekken gaat hier voor delen)
- de lange streep aan het wortelteken: $\sqrt{6 + 2 \cdot 15} = \sqrt{6 + 30} = \sqrt{36} = 6$ (vermenigvuldigen en optellen gaan hier voor worteltrekken)
- de notatie voor machten: $2^{4+1} = 2^5 = 32$ (optellen gaat hier voor machtsverheffen)

Op je rekenmachine moet je in deze gevallen de weggelaten haakjes weer toevoegen.

Opgave 5

Bereken zonder rekenmachine: $\frac{2^{1+\sqrt{25}}}{12-2 \cdot 6/3}$.
Controleer je antwoord achteraf door de gehele berekening in één keer door je rekenmachine te laten uitvoeren.

Opgave 6

Bereken zonder rekenmachine: $\sqrt{2 + \frac{12}{2^2+2}}$.
Controleer je antwoord achteraf door de gehele berekening in één keer door je rekenmachine te laten uitvoeren.

Verwerken

Opgave 7

Bereken zonder de rekenmachine te gebruiken:

a $3^5 \big/ 3^2 + 3^4$

b $3^4 \cdot 2^3$

c $\left(\sqrt{196} - 3^2\right)^3$

d $\left(2 \cdot \sqrt[3]{15}\right)^3$

e $6 \cdot 2^3 \big/ \left(4^3 - 7 \cdot 2^3\right)$

f $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{9}} \cdot 1{,}5^3$

Opgave 8

Bereken eerst zonder de rekenmachine te gebruiken en controleer daarna je berekening door hem in zijn geheel in de rekenmachine in te voeren.

a $\sqrt{2 \cdot 70 + 4}$

b $\frac{12 \cdot 3}{2^3 - 4}$

c $\frac{2^4 + \sqrt{16}}{2^5}$

d $\sqrt[3]{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3}$

Opgave 9

Onderzoek of de volgende berekeningen correct zijn. Licht steeds je antwoord toe.

a $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

b $2^6 / 2^3 = 2^{6/3} = 2^2$

c $\left(2^2\right)^3 = 2^5$

d $2^0 = 1$

Opgave 10

Bij het rekenen met wortels kun je door slim herleiden soms wortels optellen die op de eerste blik niet gelijksoortig zijn.

a Laat zien, dat $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ en dat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b Bereken nu de exacte uitkomst van $\left(\sqrt{18} + \sqrt{8}\right)^2$. Geeft je rekenmachine dezelfde uitkomst als je de berekening in één keer invoert?

c Bereken $\left(\sqrt{75} - \sqrt{27}\right)^2$ door beide wortels te herleiden. Controleer je antwoord met de rekenmachine.

Toepassen

Volgens een legende is Sissa Ben Dahir is de uitvinder van het schaakspel. De Indiase koning Shirham vroeg hem wat hij als beloning voor die uitvinding wilde hebben. Sissa Ben Dahir zei: “Geef me één graankorrel om op het eerste veld van het bord te leggen, 2 graankorrels voor op het tweede veld, 4 voor op het derde veld, 8 op het vierde en laat me zo verder gaande alle 64 velden bedekken.” De koning lachte en antwoordde: “Is dat echt alles dat je wilt hebben?” en hij gaf opdracht het graan uit te betalen.
Toen bleek dat de koning te weinig graan had om Sissa uit te betalen, liet hij Sissa Ben Dahir in de gevangenis opsluiten.

Figuur 4

Opgave 11: Graankorrels op een schaakbord

Om een idee te krijgen van het aantal graankorrels dat koning Shirham moest uitbetalen kun je eens kijken naar machten van 2.

a Waarom moet je naar machten van 2 kijken?

b Bereken nu:

- 2^0
- $2^0 + 2^1$
- $2^0 + 2^1 + 2^2$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$

c Vergelijk alle uitkomsten bij b. Wat valt je op? (Tel er eventueel telkens 1 bij op.)

d Hoeveel graankorrels wilde Sissa van de koning hebben? Schrijf je antwoord met een macht van 2.

e Nu je weet dat Sissa meer dan 18.000.000.000.000.000.000 (18 triljoen) graankorrels zou moeten krijgen, kun je misschien wel schatten hoeveel m^3 graan dat zou moeten zijn. Stel dat je dit graan wilt opslaan in een grote schuur met een vloeroppervlakte van 1000 m^2. Hoe hoog moet die schuur dan worden?

Testen

Opgave 12

Bereken:

a $\sqrt{5^3 - 100} - \frac{125}{10^2+5^2}$

b $\frac{2^{1+\sqrt{9}}}{2^5-2^4}$

Opgave 13

Bereken.

a $\frac{2^{300}}{2^{301}}$

b $\left(\sqrt{3}\right)^{100} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{50}$

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met de **rekenvolgorde**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.