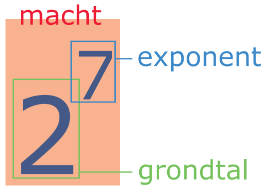
5.4 Machten

Inleiding

Bij kwadrateren wordt een getal met zichzelf vermenigvuldigd.
Je kunt een getal ook vaker met zichzelf vermenigvuldigen. Dan spreek je van machtsverheffen.
En zoals je bij kwadrateren kunt terugrekenen door worteltrekken, kun je bij machten terugrekenen door hogere machtswortels te gebruiken.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- het begrip macht en machten uitrekenen;
- het begrip derdemachtswortel en derdemachtswortels uitrekenen;

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- kwadrateren, worteltrekken en rekenen met kwadraten en wortelvormen.

Verkennen

Opgave V1

De inhoud van een kubus bereken je door de lengte van een ribbe twee keer met zichzelf te vermenigvuldigen.

a Hoe groot is de inhoud van een kubus met een ribbe van 3 cm?

b Hoeveel bedragen de afmetingen van een kubus met een inhoud van 125 eenheden?

c Waarom wordt de inhouds-eenheid "kubieke" meter geschreven als m^3?

Opgave V2

Bekijk alleen vierkanten met gehele getallen als lengtes van de zijden.

Welke afmetingen heeft het grootste vierkant dat een oppervlakte heeft van minder dan 100000? En het kleinste vierkant dat een oppervlakte heeft van meer dan 100000?

Uitleg

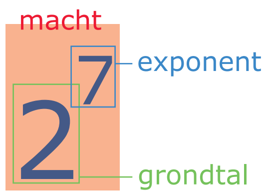
Als je een getal met zichzelf vermenigvuldigt, krijg je een kwadraat: $3 \cdot 3 = 3^2$.

Er is een meer algemene schrijfwijze voor het vermenigvuldigen met steeds hetzelfde getal. Bijvoorbeeld:
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.
Reken je zo'n getal uit, dan wordt de uitkomst machtig groot: $3^5 = 243$.

Je spreekt van machtsverheffen en je zegt '3 tot de macht 5', of kortweg '3 tot de vijfde'.
En 3^5 heet een macht met grondtal 3 en exponent 5.
Een kwadraat zoals 3^2 is een macht met grondtal 3 en exponent 2.

$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$.

Op de rekenmachine:



Figuur 2

Opgave 1

Bekijk in de **Uitleg** wat een macht is en hoe je een macht uitrekent. Bereken nu:

a 2^5

b 3^3

c 1^{12}

d $3{,}5^3$

e $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

f $\left(\frac{2}{5}\right)^4$

Opgave 2

Je kunt ook van negatieve getallen machten nemen. Daarbij zijn haakjes nodig.

a Wat betekent $(-3)^4$? En hoeveel komt daar uit?

b Wat betekent -3^4? Wat komt er uit?

Opgave 3

Uit een kwadraat kun je terugrekenen met worteltrekken. Bij derdemachten bestaat ook zoiets.
Je weet dat $5^3 = 125$.

Dit betekent dat de derdemachtswortel van 125 gelijk is aan 5: $\sqrt[3]{125} = 5$.

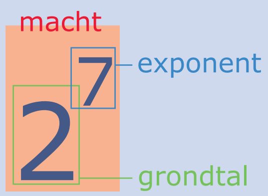
Bereken de volgende derdemachtswortels: $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Voor het vermenigvuldigen met steeds hetzelfde getal gebruik je een **macht** met **grondtal** en een **exponent**. Bijvoorbeeld:
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$.
Reken je zo'n getal uit, dan wordt de uitkomst snel groot: $3^5 = 243$.

Je spreekt van **machtsverheffen** en je zegt '3 tot de macht 5', of kortweg '3 tot de vijfde'.



Figuur 3

Bij het rekenen hebben machten voorrang op de andere bewerkingen.

Je kunt ook terugrekenen vanuit machten. Bij terugrekenen vanuit derde machten spreek je van **derdemachtswortels**. Zie **Voorbeeld 2**.

Voorbeeld 1

Het rekenen met machten is eenvoudig als je de betekenis kent:

- $17^4 = 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = 83521$
- $(-17)^4 = -17 \cdot -17 \cdot -17 \cdot -17 = 83521$
- $-17^4 = -17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = -83521$
- $100000 - 17^4 = 100000 - 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = 100000 - 83521 = 16479$

Je ziet dat machten voorrang hebben op optellen en aftrekken. En verder:

- $2^3 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$
  Bij vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op.
- $\frac{2^7}{2^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1} = 2^3$
  Bij delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten af.
- $\frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 1$ en $\frac{2^3}{2^3} = 2^0$.
  Een getal tot de macht 0 is altijd 1.
- $\left(2^3\right)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3+3} = 2^{12}$
  Bij machten van machten vermenigvuldig je de exponenten.

Opgave 4

Bereken:

a 3^4

b $3 \cdot 2^6$

c 7^1

d $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

e $\left(2\frac{2}{3}\right)^3$

f $\left(\frac{2}{7}\right)^0$

g $(-3)^5$

h $-3 \cdot 2^4$

i $-2 \cdot (-3)^2$

Opgave 5

Schrijf de volgende machten eenvoudiger. Je hoeft ze niet te berekenen!

a $3^{95} \cdot 3^{114}$

b $\frac{3^{114}}{3^{95}}$

c $3^{80} \cdot \frac{3^{54}}{3^{11}}$

d $\left(3^{12}\right)^5$

e $\frac{\left(3^{15}\right)^{10}}{3^{50} \cdot 3^{100}}$

Voorbeeld 2

De inhoud van een kubus met ribben van 4 is: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$. De inhoud van een kubus is een derde macht.

Een beroemd probleem uit de Oudheid is de ‘verdubbeling van de kubus’: Het altaar van de tempel van Delphi is een kubus van 1 bij 1 bij 1 m, welke afmetingen moet eenzelfde altaar krijgen met een 2 keer zo grote inhoud?

Omdat het bestaande altaar een inhoud heeft van $1^3 = 1$ m^3, moet de vergrote kubus een inhoud hebben van 2 m^3. Dus geldt voor de zijde z van dit altaar: $z^3 = 2$.

De oplossing van het probleem van Delphi is de derdemachts wortel uit 2: $z = \sqrt[3]{2}$.
De uitkomst hiervan vind je door inklemmen met een hoger/lager-tabel. Probeer maar eens:
$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992105$.

Opgave 6

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Hoe bereken je de lengte van de zijde van een kubus als je de inhoud van die kubus weet?

b Ga uit van een kubus met een inhoud van 8 m^3. Leg uit waarom $\sqrt[3]{8} = 2$.

c Bij het probleem van de verdubbeling van de kubus gaat het om een kubus met een inhoud van 2 m^3. Leg uit waarom $\sqrt[3]{2}$ geen geheel getal is.

d Benader met behulp van inklemmen $\sqrt[3]{2}$ in drie decimalen nauwkeurig. Controleer je antwoord met behulp van je rekenmachine.

Opgave 7

Bereken (probeer dit zoveel mogelijk uit het hoofd te doen):

a $\sqrt[3]{216}$

b $\sqrt[3]{1728}$

c $\sqrt[3]{3,375}$

d $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

Opgave 8

Benader met je rekenmachine op twee decimalen nauwkeurig:

a $\sqrt[3]{18}$

b $\sqrt[3]{100}$

c $\sqrt[3]{49}$

d $\sqrt[3]{400}$

Verwerken

Opgave 9

Bereken:

a 4^5

b $3^4 \cdot 2^3$

c $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

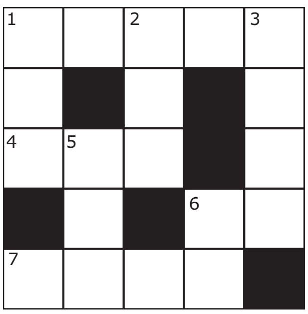
d $\left(1\frac{3}{5}\right)^3$

e $(-2)^6$

f $-2^4 \cdot 3^3$

Opgave 10

Je ziet hier een kruisgetallenpuzzel. Hij staat ook op het **werkblad**.
Vul de puzzel in.



Horizontaal		Verticaal	
1	11^4	1	5^3
4	24^2	2	26^2
6	2^6	3	2^{10}
7	92^2	5	$4^2 \cdot 7^2$
		6	4^3

Figuur 4

Opgave 11

Schrijf de volgende machten eenvoudiger. Je hoeft ze niet te berekenen!

a $2^{16} \cdot \left(2^{10}\right)^3$

b $\frac{4 \cdot 2^{26}}{2^{20}}$

c $\frac{2^{14} \cdot 2^{26}}{\left(2^{20}\right)^2}$

Opgave 12

Bereken:

a $\sqrt[3]{1000}$

b $\sqrt[3]{1000000}$

c $\sqrt[3]{10^6}$

d $\sqrt[3]{0,001}$

e $\sqrt[3]{0,000001}$

f $\sqrt[3]{0,125}$

Opgave 13

Je hebt een kubus met een inhoud van 20 liter.

a Hoeveel bedraagt de lengte van elke ribbe van deze kubus in mm nauwkeurig?

b Bereken de totale oppervlakte van deze kubus in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 14

Je kunt van een getal eerst de derde macht uitrekenen en dan op de uitkomst de derde machtswortel toepassen. En ook de omgekeerde volgorde is mogelijk.

a Neem het getal 6 en bereken $\sqrt[3]{6^3}$. Wat doe je eerst, de derde macht of de derde machtswortel?

b Bereken ook $\sqrt[3]{6}^3$.

c Doe hetzelfde als bij a en b maar nu met het getal 17.

Kennelijk heffen de bewerkingen derde macht en derde machtswortel elkaar op.

d Onderzoek of dit ook voor negatieve getallen geldt.

Toepassen

Als je een blaadje papier neemt (A4-formaat) dan kun je dit dubbel vouwen. Het dubbelgevouwen blaadje vouw je nog eens dubbel. Je hebt dan vier lagen papier op elkaar, en weer kun je het resultaat dubbelvouwen om acht lagen papier te krijgen. Enzovoorts...
Hoe vaak kun je zo blijven dubbelvouwen?

Stel je zet € 100,00 op de bank en je krijgt 4% rente per jaar als je er niet aan komt.
Een jaar later heb je dan € 104,00.
Weer een jaar later: € 108,16.
Nog een jaar later: € 112,49.
Dat noem je ‘rente op rente’ krijgen. Hoeveel heb je na 10 jaar?

Opgave 15: Papier vouwen

In **Toepassen** wordt beschreven hoe je door een blaadje papier dubbel te vouwen steeds meer lagen krijgt.

a Laat zien dat je na 8 keer vouwen 256 lagen papier hebt.

b Hoeveel lagen heb je na 10 keer vouwen?

c Hoeveel keer moet je vouwen om een laag papier van 10 cm dik te krijgen?

d En na hoeveel keer vouwen heb je een laag papier van 10 m dik?

Opgave 16: Rente op rente

In **Toepassen** wordt beschreven hoe je rekent met rente op rente.

a Reken de bedragen na 1 jaar, na 2 jaar en na 3 jaar zelf na. Hoe reken je?

b Hoeveel heb je na 10 jaar?

c Na hoeveel jaar is het beginbedrag verdubbeld?

Testen

Opgave 17

Bereken:

a 3^7

b -2^6

c $(-0{,}5)^4$

d $\left(1\frac{1}{5}\right)^3$

e $-3^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$

Opgave 18

Een kubus heeft een volume van 50 cm^3.

a Hoe groot zijn de zijden van deze kubus exact?

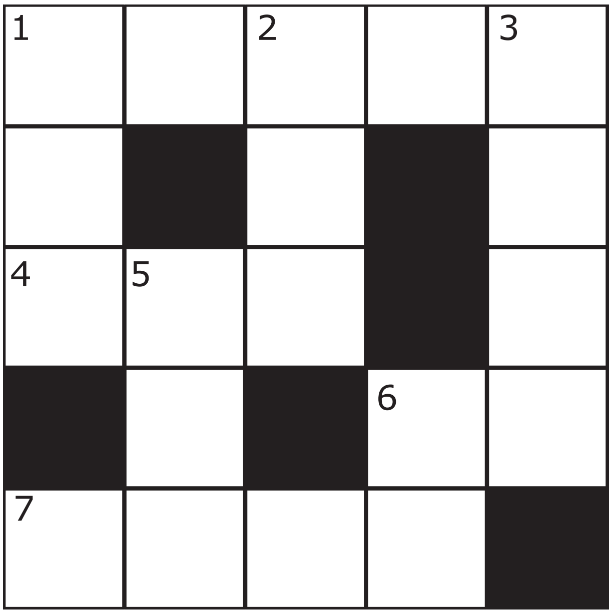
b Bereken de lengte van elke zijde van deze kubus in twee decimalen nauwkeurig in cm.
Gebruik een inklemtabel en controleer je antwoord met de rekenmachine.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **machten uitrekenen**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met 'Toon uitwerking' zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ⟲ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Werkblad bij Opgave 10 op pagina 4.



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@xs4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.