5.3 Wortelrekenen

Inleiding

Worteltrekken komt meestal niet op exacte getallen uit, je kunt wortels vaak alleen benaderen. Soms laat je dan de wortelvormen gewoon staan en ga je ermee rekenen. Maar kun je wortels zomaar optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen?
Ontdek het zelf...

Je leert in dit onderwerp

- rekenen met wortelvormen.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- worteltrekken en de betekenis van de wortel uit een getal.

Verkennen

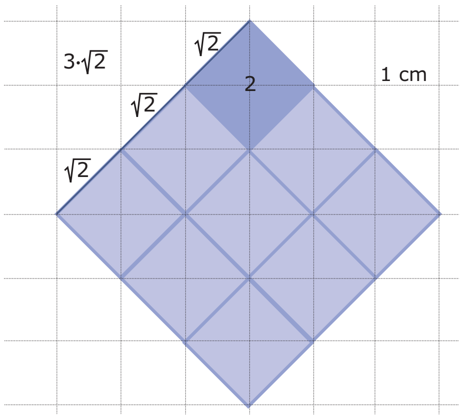
Opgave V1

Je ziet hier hoe je van negen vierkanten met een oppervlakte van 2 cm^2 één groter vierkant kunt maken.

a Hoe groot is de oppervlakte van het grote vierkant?

b Hoe lang is elke zijde van het grote vierkant?

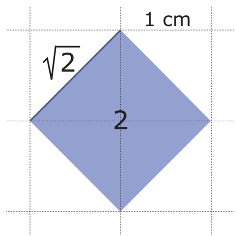
c Leg uit hoe je vanuit de lengtes van de zijden van het grote vierkant de oppervlakte ervan kunt berekenen.



Figuur 1

Uitleg

$\sqrt{2}$ is de lengte van de zijde van een vierkant met oppervlakte 2. Dit getal is niet als decimaal getal te schrijven, het is alleen te benaderen. Omdat een oppervlakte altijd positief is, kun je alleen worteltrekken uit positieve getallen en uit 0. Al in de tijd van de Oude Grieken (zo'n 600 jaar v.Chr.) was dit bekend. Zij beschouwden elke wortel als een lijnstuk. Omdat ze van veel wortels geen mooie gehele getallen of nette breuken konden maken, noemden ze wortels ‘onmeetbare getallen’. Ze konden er alleen mee rekenen door ze als lijnstukken voor te stellen.



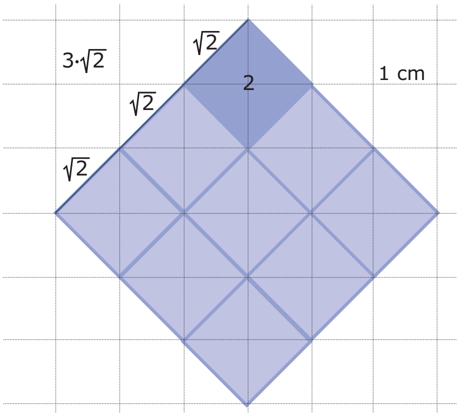
Figuur 2

Maak je het lijnstuk dat $\sqrt{2}$ voorstelt drie keer zo lang, dan krijg je $3 \cdot \sqrt{2}$ of kortweg $3\sqrt{2}$.
Dit zijn twee verschillende lijnstukken met dezelfde wortels, je mag ze nu optellen:
$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Deze optelling bestaat uit twee termen. In beide termen komen dezelfde wortels voor en daarom spreek je van gelijksoortige termen. Gelijksoortige termen mag je altijd samennemen.

Ook kun je zien: $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$.

Dit is het begin van rekenen met wortels, ook andere wortels dan $\sqrt{2}$.



Figuur 3

Opgave 1

Je ziet hier een vierkant met oppervlakte 5 cm^2.

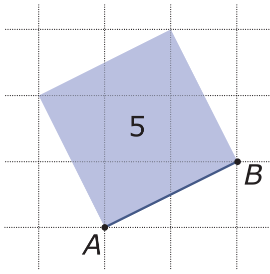
a Hoe lang is de zijde van het vierkant?

b Hoe krijg je een vierkant waarvan de zijden $2\sqrt{5}$ zijn?

c Waarom noem je $2\sqrt{5}$ en $3\sqrt{5}$ wel gelijksoortige wortels?

d Hoeveel is $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$?

e Hoeveel is $3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$?



Figuur 4

Opgave 2

In de vorige opgave had je een vierkant met oppervlakte 5 en dus zijde $\sqrt{5}$. Neem nu een vierkant waarvan de zijden $2\sqrt{5}$ zijn.

a Teken dit vierkant. Bepaal de oppervlakte ervan door de figuur te verdelen in een vierkant en vier halve rechthoeken.

b Hoe kun je die oppervlakte uitrekenen door de zijden te vermenigvuldigen?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De wortel uit een getal heeft meestal geen exacte uitkomst, kan alleen worden benaderd.
Daarom laat je wortelvormen vaak staan in een berekening en reken je er mee.

Wil je uitdrukkingen met wortels optellen, dan spreek je van de **termen** van de optelling. Termen waarin dezelfde wortelvormen voorkomen heten **gelijksoortige termen**.
Wil je uitdrukkingen met wortels vermenigvuldigen, dan spreek je van de **factoren** van de vermenigvuldiging.

Voor het **rekenen met wortels** geldt:

- het vermenigvuldigingsteken tussen een getal en een wortelvorm laat je vaak weg: $4 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$;
- gelijksoortige termen kun je samennemen: $\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$;
- niet gelijksoortige termen kun je niet samennemen: $\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$ kun je niet korter schrijven;
- wortelvormen kun je vermenigvuldigen en delen: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ en $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$.

Voorbeeld 1

Meestal kun je berekeningen met wortels alleen benaderen met de rekenmachine. Alleen gelijksoortige wortels kun je optellen tot één wortelvorm.
Voorbeelden van optellingen en aftrekkingen met wortels zijn:

- $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ kun je niet als één wortel schrijven want er zijn geen gelijksoortige termen, maar wel benaderen met je rekenmachine: $\sqrt{2}+\sqrt{3} \approx 3{,}14626437$.

  [2nd] [x^2] [2] [)] [+] [2nd] [x^2] [3] [)] [=]
- $\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}$ (drie gelijksoortige termen)
- $6\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ (twee gelijksoortige termen)
- $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$
- $\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\approx 3{,}605551275$, dit kan ook in één keer op de rekenmachine:

  [2nd] [x^2] [9] [+] [4] [)] [=]
- $\sqrt{7}+\sqrt{25}+4\sqrt{7}-3\sqrt{7}=2\sqrt{7}+5$ (alleen gelijksoortige termen kun je samen nemen).

Opgave 3

Voer de volgende berekeningen met wortels uit. Benader alleen waar nodig het eindantwoord in twee decimalen nauwkeurig.

a $\sqrt{2+3+4}$

b $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}$

c $\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}$

d $6\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

Opgave 4

Bereken en laat in het eindantwoord de wortel staan:

a $\sqrt{6}+\sqrt{6}$

b $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

c $4\sqrt{7}+\sqrt{7}$

d $4\sqrt{7}+2\sqrt{9}$

e $5\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

f $4\sqrt{7}-3\sqrt{7}$

g $8\sqrt{6}-\sqrt{16}$

h $8\sqrt{6}-\sqrt{6}$

Voorbeeld 2

Vermenigvuldigen en delen van wortels is eigenlijk heel eenvoudig.
Dat kun je in deze voorbeelden zien:

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$ wat je kunt controleren door kwadrateren.
- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}$ wat je ook kunt controleren door kwadrateren.

Op dezelfde manier kun je de volgende berekeningen uitvoeren:

- $3\cdot\sqrt{2}\cdot 5\cdot\sqrt{3}=3\cdot 5\cdot\sqrt{2\cdot 3}=15\cdot\sqrt{6}$
- $2\cdot\sqrt{7}^2=2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=2\cdot\sqrt{49}=2\cdot 7=14$
- $\frac{15\cdot\sqrt{6}}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{15}{3}\cdot\sqrt{\frac{6}{2}}=5\cdot\sqrt{3}$

Opgave 5

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Laat zien dat $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ door beide zijden te kwadrateren.

b Laat ook door kwadrateren zien, dat $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$.

Opgave 6

Geef van de volgende berekeningen aan of ze waar zijn of niet.

a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$

b $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7}$

c $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{5}$

d $2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}$

e $3 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27}$

f $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 8$

Opgave 7

Maak de volgende berekeningen. Laat wortels die niet op een geheel getal uitkomen in het antwoord staan.

a $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$

b $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

c $4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7}$

d $\sqrt{18} \Big/ \sqrt{2}$

e $\sqrt{15} \Big/ \sqrt{3}$

f $\frac{8\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$

Verwerken

Opgave 8

Maak de volgende berekeningen zonder de rekenmachine te gebruiken. Laat wortels die niet op een geheel getal uitkomen in het antwoord staan.

a $\sqrt{7} + \sqrt{7}$

b $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

c $5\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

d $3\sqrt{5} - \sqrt{5}$

e $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

f $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7}$

g $\sqrt{125} \Big/ \sqrt{5}$

h $5\sqrt{10} \Big/ \sqrt{2}$

Opgave 9

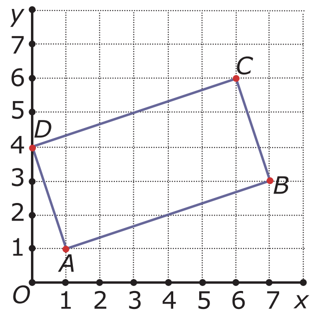
Hier zie je in een assenstelsel de punten $A(1,1)$, $B(7,3)$, $C(6,6)$ en $D(0,4)$ en rechthoek $ABCD$.

a Bereken de oppervlakte van rechthoek $ABCD$.

b Verdeel de rechthoek in twee vierkanten en leg uit hoe je daarmee de lengtes van de zijden kunt berekenen. Bereken de lengtes van AB en AD.

c Laat zien hoe je met behulp van deze twee zijden ook de oppervlakte van de rechthoek kunt berekenen.

d Bereken ook de exacte omtrek van de rechthoek.



Figuur 5

Opgave 10

Geef van de volgende berekeningen aan of ze waar of niet waar zijn.

a $\sqrt{7} + \sqrt{8} = \sqrt{15}$

b $\sqrt{9} + \sqrt{49} = \sqrt{100}$

c $\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

d $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{6}$

Opgave 11

Uit een aantal van de volgende berekeningen komt een geheel getal. Bij de andere laat je de wortel in het antwoord staan.

a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12{,}5}$

b $3\sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$

c $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}$

d $\sqrt{50} \big/ \sqrt{5}$

e $\frac{2\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

f $\frac{6\sqrt{12{,}5}}{3\sqrt{2}}$

Opgave 12

Je ziet hier twee vierkanten in elkaar.

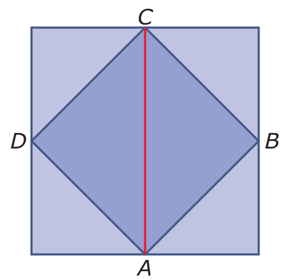
a Bereken de lengte van AB en diagonaal AC als de oppervlakte van vierkant $ABCD$ 6 is.

b Bereken de lengte van AB en diagonaal AC als de oppervlakte van vierkant $ABCD$ 10 is.

c Bereken de lengte van de diagonaal van een vierkant met oppervlakte 8.

d Bereken de lengte van de diagonaal van een vierkant met oppervlakte a.

e Bereken de lengte van de diagonaal van een vierkant met zijde z.

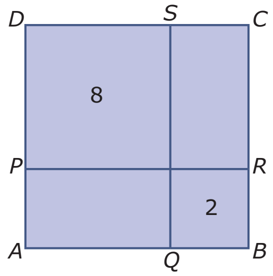


Figuur 6

Opgave 13

Een vierkant $ABCD$ is verdeeld in twee kleinere vierkanten en twee rechthoeken. De oppervlaktes van beide kleinere vierkanten zijn gegeven, zie figuur.

Bereken de oppervlakte van $ABCD$.



Figuur 7

Toepassen

Het benaderen van wortels is voor ons heden ten dage een fluitje van een cent: je rekenmachine doet dat zo maar in een stuk of negen decimalen nauwkeurig. Geweldig natuurlijk, maar... elektronische rekenmachines bestaan nauwelijks 60 jaar.
Tot die tijd werd er vaak met tabellen voor wortels gewerkt.
En in die tabellen kwamen natuurlijk niet van alle getallen de wortels voor, vaak alleen maar wortels van 1 t/m 100...
Er bestaan dan nog een paar technieken om wortels die niet in de tabel voorkwamen te vinden:

- Benaderen met behulp van inklemmen, het 'hoger/lager spelletje' uit.
- Het rekenen met wortels op een handige manier toepassen:
  $\sqrt{500} = \sqrt{100 \cdot 5} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{5} = 10 \cdot \sqrt{5}$
  $\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5 \cdot \sqrt{6}$
- En er bestaat een speciale techniek om wortels uit willekeurige (positieve) decimalen getallen te vinden. Die is echter gebaseerd op verdergaande kennis van wiskunde...

Opgave 14: Wortels herleiden

Je ziet hierboven hoe je wortels van getallen die een kwadraat bevatten kunt vereenvoudigen.

a Laat zien dat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b Vereenvoudig op dezelfde manier $\sqrt{45}$.

c Herleid op dezelfde manier: $\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{40}$ en $\sqrt{75}$

Opgave 15: Kettingbreuk

Een leuke manier om wortels te benaderen is met behulp van een kettingbreuk. Zo is:
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}}}$.

Hiermee kun je $\sqrt{2}$ in zoveel decimalen als je maar wilt benaderen. Bedenk hoe je dat doet en benader deze wortel in vijf decimalen nauwkeurig. Kun je de nauwkeurigheid van je rekenmachine halen?

Testen

Opgave 16

Maak de volgende berekeningen zonder rekenmachine. Laat wortels die niet op een geheel getal uitkomen in het antwoord staan.

a $2\sqrt{5} + \sqrt{5}$

b $6\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

c $6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}$

d $\frac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}$

Opgave 17

Een rechthoek bestaat uit drie vierkanten met oppervlakte 15 cm^2.

a Hoe groot zijn de exacte lengte en de exacte breedte van deze rechthoek?

b Bereken de oppervlakte van deze rechthoek door de lengte en de breedte te vermenigvuldigen.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **rekenen met wortels zonder rekenmachine**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met ↻ krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.