5.2 Wortels

Inleiding

Dit is een vierkant met een oppervlakte van 2 cm^2. Om de lengte van de zijde te bepalen moet je een getal vinden waarvan het kwadraat 2 is. Zo'n getal kun je door proberen (hoger/lager-tabel) vinden. Gek genoeg komt er geen nauwkeurig decimaal getal uit...

Je leert in dit onderwerp

- terugrekenen vanuit een kwadraat (worteltrekken) en de bijbehorende notatie.

Voorkennis

- rekenen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) met positieve en negatieve getallen en met breuken en alle begrippen die daarbij horen;
- de oppervlakte van een roosterfiguur en een vierkant met gegeven zijde berekenen door kwadrateren.

Verkennen

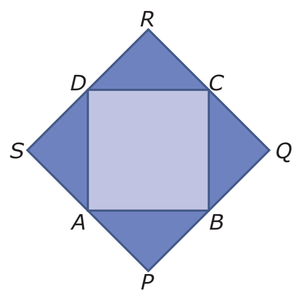
Opgave V1

Een probleem uit de Oudheid was het verdubbelen van een vierkant. Hier zie je hoe een vierkant wordt verdubbeld: de oppervlakte van vierkant $PQRS$ is het dubbele van de oppervlakte van vierkant $ABCD$. De oppervlakte van $ABCD$ is 1 cm^2.

a Hoe groot is de oppervlakte van vierkant $PQRS$?

b Hoe lang is elke zijde van vierkant $PQRS$? Geef een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

c Leg uit waarom de lengte van de zijde $PQRS$ geen geheel getal is.



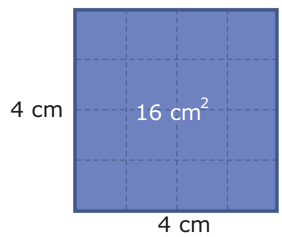
Figuur 1

Uitleg

De oppervlakte van dit vierkant is 16 cm^2.
De lengte van elke zijde is 4 cm, want $4^2 = 4 \times 4 = 16$.
Je zegt: de **wortel** van 16 is 4.
Je schrijft dit als: $\sqrt{16} = 4$.
Dat noem je **wortel trekken**. Je rekenmachine kan ook wortel trekken. Bijvoorbeeld $\sqrt{441} = 21$ gaat waarschijnlijk zo:

2nd x^2 441) =

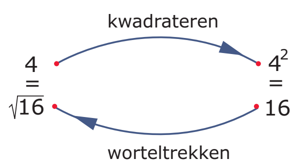
Maar misschien heeft je rekenmachine wel een afzonderlijke worteltoets...



Figuur 2

De bewerkingen 'kwadraat nemen' en 'wortel trekken' heffen elkaar op. Meetkundig gezien gaat het bij kwadrateren om het bepalen van de oppervlakte van een vierkant vanuit de zijde: $4^2 = 16$. En bij wortel trekken gaat het om het bepalen van de zijde vanuit een gegeven oppervlakte $\sqrt{16} = 4$.

En dus is: $\sqrt{4^2} = 4$ en ook $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$



Figuur 3

Opgave 1

De oppervlakte van een vierkant is 64 cm^2.

a Hoe bereken je de zijde van het vierkant? Bereken ook die zijde.

b De zijde van een vierkant heeft een lengte van $\sqrt{7}$. Hoeveel bedraagt de oppervlakte?

Opgave 2

Bereken de volgende wortels zonder rekenmachine:

a $\sqrt{49}$

b $\sqrt{144}$

c $\sqrt{2{,}25}$

d $\sqrt{\frac{4}{9}}$

e $\sqrt{0{,}64}$

f $\sqrt{49}$

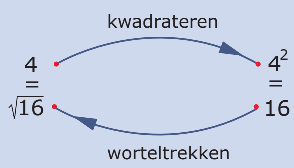
Opgave 3

Tussen welke gehele getallen ligt $\sqrt{140}$?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Als je vanuit een kwadraat terugrekent, noem je dat **worteltrekken** en het resultaat heet de **wortel** van dat getal. Worteltrekken is de terugrekenbewerking bij kwadrateren en je kunt deze bewerking op elk getal toepassen.



Figuur 4

De wortel van 16 schrijf je als $\sqrt{16}$.
De wortel van 16 is $\sqrt{16} = 4$, want $4^2 = 16$.

De wortel van 3 schrijf je als $\sqrt{3}$.
De wortel van 3 is $\sqrt{3} = 1{,}73205... \approx 1{,}732$.
Dit getal is alleen te benaderen, er bestaat geen exacte uitkomst.

Het kwadraat van $\sqrt{3}$ is $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

De wortel van 3^2 is $\sqrt{3^2} = 3$.

Voorbeeld 1

Uit een kwadraat kun je gemakkelijk wortel trekken.
Bijvoorbeeld:

- $\sqrt{1024} = \sqrt{32^2} = 32$
- $\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
- $\sqrt{1{,}44} = \sqrt{(1{,}2)^2} = 1{,}2$

Opgave 4

Bereken:

a $\sqrt{64}$

b $\sqrt{100}$

c $\sqrt{144}$

d $\sqrt{225}$

e $\sqrt{2,25}$

f $\sqrt{6,25}$

g $\sqrt{0,09}$

h $\sqrt{0,36}$

Opgave 5

Bereken:

a $\sqrt{\frac{1}{9}}$

b $\sqrt{\frac{1}{25}}$

c $\sqrt{\frac{9}{16}}$

d $\sqrt{\frac{25}{36}}$

e $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

f $\sqrt{2\frac{1}{4}}$

g $\sqrt{2\frac{7}{9}}$

h $\sqrt{20\frac{1}{4}}$

Opgave 6

Hoe zit het met de wortels van negatieve getallen?

a Welk antwoord zou je $\sqrt{-16}$ willen geven?

b Hoe reken je $\sqrt{(-4)^2}$ uit?

c Waarom kun je de wortel uit een negatief getal niet trekken?

Opgave 7

Je voert nu de bewerkingen "kwadrateren" en "worteltrekken" na elkaar uit.

a Hoe bereken je $\sqrt{4^2}$? En wat komt er uit?

b Hoe bereken je $\sqrt{4}^2$? En wat komt er uit?

c Vervang in a en b het getal 4 door een willekeurig ander niet-negatief getal. Wat gebeurt er telkens?

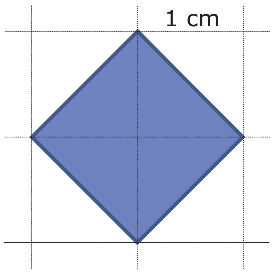
Voorbeeld 2

De oppervlakte van dit vierkant is 2 cm^2.

De lengte van de zijde is daarom $\sqrt{2}$.

Maar hoe groot is $\sqrt{2}$ nu precies?

Dit was al in de Oudheid een boeiende vraag.
Niemand wist er het antwoord op...
Na lang proberen (inklemmen met een hoger/lager-tabel) vind je ongeveer 1,414213562, maar zelfs dat is niet het exacte antwoord...



Figuur 5

$\sqrt{2}$ is niet exact te berekenen, dit getal kan alleen worden benaderd!

$\sqrt{2} \approx 1,4142$ gaat waarschijnlijk zo:

2nd x^2 2 =

Hetzelfde geldt voor getallen als $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{20}$, kortom voor vrijwel alle wortels.
Alleen de wortels uit zuivere kwadraten ‘komen uit’: bijvoorbeeld $\sqrt{9} = 3$ en $\sqrt{0,04} = 0,2$

Opgave 8

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Teken zelf zo’n vierkant op een cm-rooster en leg uit waarom de oppervlakte van dit vierkant 2 is.

b De lengte van de zijde van het vierkant is daarom $\sqrt{2}$. Meet eens op hoe lang de zijde van het vierkant is in mm nauwkeurig en leg uit waarom dit nooit de exacte lengte van de zijde kan zijn.

c Waarom kan ook 1,414213562 niet de exacte waarde van $\sqrt{2}$ zijn?

d Waarom zal $\sqrt{2}$ nooit een exact decimaal getal kunnen zijn?

e Wat maakt jouw rekenmachine van $\sqrt{2}$? En wat gebeurt er als je met die benadering in beeld op de kwadraattoets drukt? Hoe komt dat, denk je?

Opgave 9

Schat bij de volgende wortels eerst tussen welke gehele getallen ze liggen. Bereken ze dan met je rekenmachine en rond af op vier decimalen nauwkeurig:

a $\sqrt{3}$

b $\sqrt{50}$

c $\sqrt{0{,}4}$

d $\sqrt{1000}$

e $\sqrt{5\frac{1}{3}}$

f $\sqrt{-21}$

g $-\sqrt{21}$

h $\sqrt{50} - \sqrt{5}$

Verwerken

Opgave 10

Bereken de volgende wortels zonder de rekenmachine te gebruiken.
Je kunt dit verder oefenen met het **Practicum**.

a $\sqrt{121}$

b $\sqrt{196}$

c $\sqrt{4{,}41}$

d $\sqrt{0{,}0025}$

e $\sqrt{73 - 9}$

f $\sqrt{1\frac{15}{49}}$

g $\sqrt{625} - \sqrt{361}$

h $-\sqrt{0{,}36}$

Opgave 11

Een vierkant heeft een oppervlakte van 20 cm^2.

a Hoe groot is de exacte lengte van elke zijde?

b Tussen welke opeenvolgende gehele getallen ligt de lengte van deze zijde?

c Benader de lengte van de zijden van dit vierkant in drie decimalen nauwkeurig.

d Waarom kan dit nooit meer dan een benadering van de werkelijke lengte zijn?

Opgave 12

Schat bij de volgende wortels eerst tussen welke gehele getallen ze liggen. Bereken ze dan met je rekenmachine en rond af op vier decimalen nauwkeurig:

a $\sqrt{5}$

b $\sqrt{96}$

c $\sqrt{0{,}0014}$

d $\sqrt{1700}$

e $\sqrt{15\frac{1}{5}}$

f $12 \cdot \sqrt{5}$

Opgave 13

De oppervlakte van een vierkant is A cm^2. De omtrek van dit vierkant is P cm.

a Neem $A = 25$ en bereken P.

b Neem $A = 24$ en bereken P.

c Stel een formule op voor het verband tussen A en P van de vorm $P = ...$

d Stel een formule op voor het verband tussen A en P van de vorm $A = ...$

e Bepaal de waarde(n) waarvoor $A = P$.

Opgave 14

Bereken zonder rekenmachine:

a $\sqrt{13^2}$

b $\sqrt{13}^2$

c $\sqrt{7}^2 - 2 \cdot \sqrt{49}$

d $\sqrt{256} - \sqrt{15}^2$

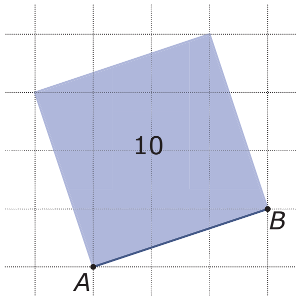
Toepassen

Bekijk de applet: Lengte van een lijnstuk berekenen.

Op een lijnstuk kun je altijd een vierkant maken. Als je dan de oppervlakte van dit vierkant exact kunt bepalen, kun je door worteltrekken ook de lengte van het lijnstuk (de zijde van het vierkant) vaststellen.

Omdat op lijnstukAB een vierkant van 10 eenheden past, geldt: $AB = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

Van lijnstukken tussen roosterpunten kun je zo dus altijd de lengte berekenen.



Figuur 6

Opgave 15: Wortels en vierkanten

a Ga na dat het vierkant op AB inderdaad een oppervlakte van 10 heeft.

b Bereken op deze manier de lengte van AB als punt B 4 eenheden rechts en 2 eenheden boven punt A ligt.

c Oefen dit met een medeleerling, het zal je later nog van pas komen.

Opgave 16: Rare rechthoek?

Een rechthoek heeft een lengte van $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ en een breedte van $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

Laat zien, dat de oppervlakte van deze rechthoek 2 is.

Testen

Opgave 17

Bereken de volgende wortels zonder rekenmachine. Controleer daarna je antwoord met behulp van je rekenmachine.

a $\sqrt{144}$

b $\sqrt{0{,}81}$

c $-\sqrt{10{,}24}$

d $\sqrt{3\frac{1}{16}}$

Opgave 18

Van een vierkant is de oppervlakte 15 cm^2.

a Hoe groot is de exacte lengte van elke zijde van dit vierkant?

b Bereken de lengte van de zijde van het gegeven vierkant in twee decimalen nauwkeurig.

Practicum

Met *Algebra***KIT** kun je oefenen met **het worteltrekken zonder rekenmachine**. Je kunt telkens een nieuwe opgave oproepen. Je maakt elke opgave zelf op papier.
Met ‘Toon uitwerking’ zie je het verder uitklapbare antwoord.
Met krijg je een nieuwe opgave.

Werk met AlgebraKIT.