8.6 Vergroten

Inleiding

Dit is een model van een Smart ForTwo, schaal 1 : 18.

Alle afmetingen zijn dus $\frac{1}{18}$ deel van de werkelijke afmetingen. Maar wat gebeurt er dan met de oppervlakte en de inhoud?

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de begrippen lengte-, oppervlakte- en volumevergrotingsfactor kennen;
- werken met vergrotingen en verkleiningen van figuren.

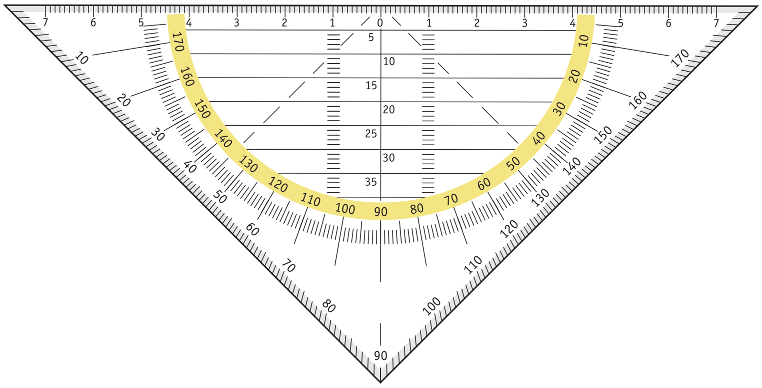
Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte en de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Verkennen

Opgave V1

De meeste geodriehoeken hebben een lange zijde van 16 cm.



Figuur 2

a Hoe lang zijn de andere twee zijden? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

b Stel je eens voor dat je een geodriehoek zou kunnen kopen waarvan de lange zijde 2 keer zo groot is. Hoe lang zijn dan de andere twee zijden? Wat gebeurt er met de schaalverdeling op de lange zijde?

c Alle afmetingen van die tweede geodriehoek worden 2 keer zo groot. Wat verandert er echter niet?

d Wordt nu ook de oppervlakte van de geodriehoek 2 keer zo groot?

Opgave V2

Je hebt twee kubussen: één met ribben van 2 cm lengte en één met ribben van 6 cm.

a Hoeveel keer zo groot zijn alle afmetingen van de grote kubus ten opzichte van de kleine?

b Hoeveel keer zo groot zijn alle afmetingen van de kleine kubus ten opzichte van de grote?

c De kubus met ribben van 6 is een vergroting van de kleinere kubus. Wat verandert er echter niet?

d Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de grootste kubus ten opzichte van de kleinste?

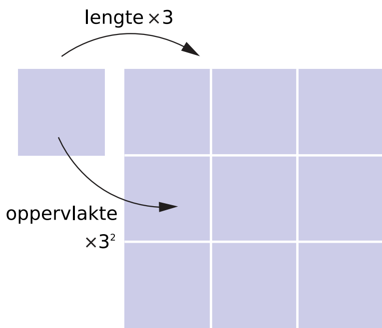
e Hoeveel keer zo groot is de inhoud van de grootste kubus ten opzichte van de kleinste?

Uitleg 1

Hier zie je wat er gebeurt als je van een vierkant alle zijden 3 keer zo groot maakt:

- alle lengtes worden 3 keer zo groot;
- de oppervlakte wordt $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ keer zo groot.

Omdat de oppervlakte van een figuur niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidsvierkanten, geldt dit voor elke figuur. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k:
Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot.
Omdat de vorm van beide figuren bij vergroten hetzelfde blijft heten ze gelijkvormig.



Figuur 3

Opgave 1

Een rechthoek is 6 cm lang en 4 cm breed. Een tweede rechthoek heeft 3 keer zo grote afmetingen.

a Hoe groot is de oppervlakte van de eerste rechthoek?

b Bereken eerst de afmetingen en met behulp daarvan de oppervlakte van de tweede rechthoek.

c Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de tweede rechthoek in vergelijking met de eerst?

Opgave 2

Een driehoek wordt op schaal getekend: elke cm is in werkelijkheid 10 m.

a De kortste zijde van de driehoek is op de tekening 4,25 cm. Hoe lang is die zijde in werkelijkheid?

b De langste zijde van de driehoek is in werkelijkheid 118 m. Hoe lang wordt die zijde op de tekening?

c De hoek tussen deze twee zijden is op de tekening 60°. Hoeveel is die hoek in werkelijkheid?

d De oppervlakte van de driehoek is op de tekening ongeveer 21,72 cm^2. Hoe groot is die oppervlakte in werkelijkheid?

e Hoe groot is de lengtevergrotingsfactor van de driehoek op de tekening naar de werkelijkheid? En de oppervlaktevergrotingsfactor?

Opgave 3

Boer Brandwijk heeft een stuk grond van 2,4 hectare. Op een kaart op schaal 1 : 50.000 is dat stukje land getekend.

a Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor van werkelijkheid naar de kaart?

b Hoeveel m^2 is boer Brandwijk's stuk land?

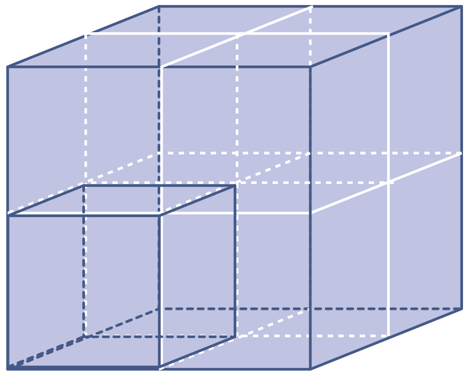
c Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van boer Brandwijk's stuk land op de kaart?

Uitleg 2

Hier zie je wat er gebeurt als je van een kubus alle ribben 2 keer zo groot maakt:

- alle lengtes worden 2 keer zo groot;
- alle oppervlaktes wordt $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ keer zo groot;
- de inhoud wordt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ keer zo groot.

Omdat een inhoud niet meer is dan de som van een (niet altijd geheel) aantal eenheidskubussen, geldt dit voor elk lichaam. Bovendien kun je het veralgemeniseren tot een lengtevermenigvuldiging met factor k:
Als alle lengtes k keer zo groot worden, worden alle oppervlaktes k^2 keer zo groot en de inhoud k^3 keer zo groot.



Figuur 4

Opgave 4

Een kubus heeft ribben van 5 cm. Een tweede kubus heeft 4 keer zo grote afmetingen.

a Hoe groot zijn de ribben van de tweede kubus?

b De oppervlakte van de eerste kubus is $6 \cdot 25 = 150$ cm^2 , waarom?

c Hoeveel bedraagt de inhoud van de eerste kubus?

d Hoeveel bedraagt de inhoud van de tweede kubus?

e Geef de lengtevergrotingsfactor, de oppervlaktevergrotingsfactor en de inhoudsvergrotingsfactor van de eerste kubus naar de tweede.

Opgave 5

Een kunstenaar maakt eerst een schaalmodel, alvorens het definitieve beeld wordt gemaakt. De afmetingen van het echte beeld moeten 20 keer zo groot worden als die van het schaalmodel. Het schaalmodel heeft een oppervlakte van 1400 cm^2 en een volume van 3000 cm^3.

Bereken de oppervlakte en de inhoud van het echte beeld.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

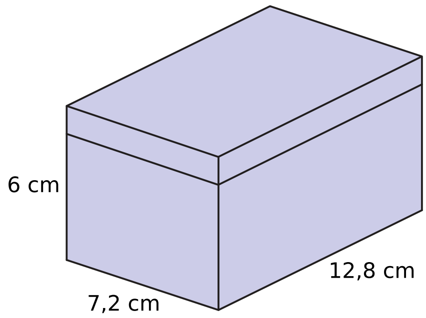
Als je een figuur vergroot (of verkleint) door alle afmetingen met factor k te vermenigvuldigen, dan krijg je een nieuwe figuur die **gelijkvormig** is met de oorspronkelijke.

Verder geldt bij twee gelijkvormige figuren: als de **lengtevergrotingsfactor** k is, dan is de **oppervlaktevergrotingsfactor** k^2 en de **volumevergrotingsfactor** k^3.

Bij een object op schaal $1 : a$ is de lengtevergrotingsfactor $\frac{1}{a}$.

Voorbeeld 1

Hier zie je een model van een houten kist. Van de werkelijke kist zijn alle afmetingen 10 keer zo groot, de gebruikte schaal is dus 1 : 10. De hoeveelheid hout die je voor deze kist nodig hebt wordt bepaald door de oppervlakte: van het model is de oppervlakte 424,32 cm^2. De inhoud van het model is 511,56 cm^3, want de wanden zijn 10 mm dik.
Hoe zit het nu met de oppervlakte en de inhoud van de de werkelijke kist?



Figuur 5

Antwoord

De lengtevergrotingsfactor is 10.
De oppervlaktevergrotingsfactor is daarom $10^2 = 100$.
De oppervlakte van de werkelijke kist is dus $424{,}32 \cdot 100 = 42432$ cm^2.

De inhoudsvergrotingsfactor is $10^3 = 1000$.
De inhoud van de werkelijke kist is dus $511{,}56 \cdot 1000 = 511560$ cm^3 en dat is 511,56 L.

Opgave 6

Bekijk het schaalmodel van een kist in **Voorbeeld 1** nog eens.

a Bereken de oppervlakte en de inhoud van dit schaalmodel zelf na.

b Hoeveel keer zo dik worden de wanden van de werkelijke kist?

Er wordt een tweede kist gemaakt van dit zelfde schaalmodel. De schaal daarvan is 1 : 5.

c Is die kist groter op kleiner dan de eerste? Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor van deze kist ten opzichte van de eerste?

d Bereken de oppervlakte van de tweede kist vanuit die van de eerste kist.

e Bereken de inhoud van de tweede kist vanuit die van de eerste kist.

Opgave 7

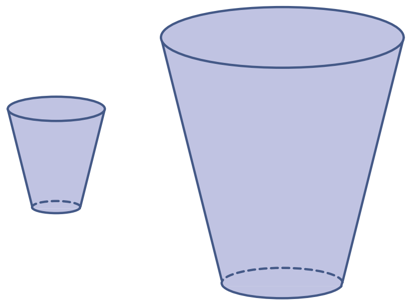
Twee bekers zijn gelijkvormig. De hoogte van de rechter beker is 2,5 keer zo groot dan die van de linker.

a Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor als je de grote beker opvat als een vergroting van de kleine beker?

b Hoeveel bedraagt de lengtevergrotingsfactor als je de kleine beker opvat als een ‘vergroting’ van de grote?

Er gaat 63,3 cm^3 in de grote beker.

c Hoeveel gaat er in de kleine beker?



Figuur 6

Voorbeeld 2

Op een kaart is een rechthoekig weiland van 5 hectare maar 5 cm^2 groot.
Hoeveel bedraagt de schaal van de kaart?

Antwoord

1 hectare is 1 hm^2 en dat is 10.000 m^2 en dus 100.000.000 cm^2.

De oppervlakte van het weiland is op de kaart 5 cm^2 en in werkelijkheid 500.000.000 cm^2. Dat is 100.000.000 keer zo groot.

De oppervlaktevergrotingsfactor is 100.000.000, dus de lengtevergrotingsfactor is 10.000.

Immers: $k^2 = 100.000.000$ geeft $k = \sqrt{100.000.000} = 10.000$.

De schaal van de kaart is daarom 1 : 10.000.

Opgave 8

Een rechthoekig weiland van 25 hectare heeft op een kaart een oppervlakte van 100 cm^2.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Opgave 9

De gemeente Deventer heeft (in 2010) een oppervlakte van 134,37 km^2.
Op een kaart is die oppervlakte nog 1,3437 cm^2.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Voorbeeld 3

Een bronzen beeld weegt 240 kg. Het schaalmodel is van hetzelfde materiaal gemaakt en weegt 240 gram. Op welke schaal is het schaalmodel gemaakt?

Antwoord

240 kg is 240.000 gram.

Het werkelijke beeld weegt 1000 keer zoveel als het schaalmodel. Omdat het van hetzelfde materiaal is gemaakt is de inhoudsvergrotingsfactor dus ook 1000.

Omdat $\sqrt[3]{1000} = 10$, is de lengtevergrotingsfactor 10.

De schaal is 1 : 10.

Opgave 10

Je kunt een bepaalde drank kopen in kleine flesjes van 0,25 L en in grote flessen van 1,5 L. Beide soorten flessen zijn gelijkvormig.

a Hoeveel keer zo groot is de hoogte van de grote fles als de hoogte van de kleine fles?

b Hoeveel keer zoveel glasoppervlakte heeft de grote fles als de kleine fles?

Opgave 11

Je hebt twee maatbekers: de rechter heeft een 3,375 keer zo grote inhoud als de linker. De linker maatbeker wordt gemaakt van 400 cm^2 metaalplaat.

Hoeveel metaal is er nodig voor de rechter maatbeker?

Verwerken

Opgave 12

Een voetbalveld is getekend op schaal 1 : 1000. In de tekening is het 12 cm lang en 7,5 cm breed.

a Hoe groot is dit voetbalveld in werkelijkheid?

b Met welk getal moet je de afmetingen van dit veld vermenigvuldigen om de werkelijke afmetingen te krijgen?

c Hoe groot is de oppervlakte van het voetbalveld op de tekening?

d Met welk getal moet je de oppervlakte van dit veld vermenigvuldigen om de werkelijke oppervlakte te krijgen?

e Hoeveel m^2 is de oppervlakte van het voetbalveld in werkelijkheid?

Opgave 13

Op een kaart met een schaal van 1 : 200 heeft een bouwkavel een oppervlakte van 32 cm^2.

Hoeveel m^2 is de oppervlakte van deze kavel in werkelijkheid?

Opgave 14

Een raam heeft een oppervlakte van 1,2 m^2. Een tweede raam heeft afmetingen die precies 2,5 keer zo groot zijn als het eerste.

a Hoeveel m^2 is de oppervlakte van dit tweede raam?

Een derde raam heeft een oppervlakte van 4,80 m^2.

b Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen van dit derde raam ten opzichte van het eerste?

c Hoeveel keer zo groot zijn de afmetingen van dit derde raam ten opzichte van het tweede raam?

Opgave 15

Er lopen drie koeien in de wei. Ze zitten elk aan een touw dat met een pin in de grond vast zit. Het touw van koe Antje is 10 m lang.

a Hoeveel m^2 gras kan zij eten?

Het touw van Bertha is twee maal zo lang.

b Hoeveel m^2 gras kan zij meer eten dan Antje?

Carrie kan vijf maal zoveel gras eten als Antje.

c Hoeveel keer zo groot is het touw van Carrie als dat van Antje?

Opgave 16

Bij een schaalmodel van een voorwerp worden alle lengtes met een vaste vergrotingsfactor verkleind. Dit model van een Smart ForTwo heeft een schaal van 1 : 18.
De afmetingen van een echte Smart ForTwo van deze versie zijn: lengte 250 cm, breedte 152 cm en hoogte 155 cm. De cilinderinhoud van de motor is 698 cc (1 cc = 1 cm^3) en er past 33 L benzine in de tank. De totale glasoppervlakte is ongeveer 3,2 m^2.


Figuur 7

a Bereken de lengte, de breedte en de hoogte van het schaalmodel in cm nauwkeurig.

b Bereken de glasoppervlakte van het schaalmodel in mm^2 nauwkeurig.

c Bereken de cilinderinhoud van het schaalmodel in mm^3 nauwkeurig.

d Bereken hoeveel mm^3 benzine er in de tank van het schaalmodel past.

Opgave 17

De spoorlijn van Arnhem naar Leeuwarden was in september 1868 geheel klaar. De lengte van deze spoorlijn is 166 km.
Op een kaart is deze lijn 16,6 cm lang.

Hoeveel bedraagt de schaal van die kaart?

Opgave 18

Tandpasta kun je in tubes van 25 mL en 150 mL kopen. Deze tubes zijn gelijkvormig.

a Hoeveel keer zo groot is de grote tube ten opzichte van de kleinere?

b De kleinste tube is 12 cm lang. Hoe lang is de grootste tube?

c De tubes zijn van plastic cilinders gemaakt. Hoeveel keer zo groot is de oppervlakte van de grote tube vergeleken met de kleine tube?

Opgave 19

Een ringslang met lengte van 1 m heeft een gewicht van 240 gram en een huidoppervlakte van 483 cm^2. Een boa constrictor is een slang die veel groter is. Een bepaalde boa weegt 51,84 kg.

Hoe groot is de huidoppervlakte van deze boa?

Figuur 8

Toepassen

Onze planeet **Aarde** heeft een omtrek van ongeveer 40.000 km, een oppervlakte van ongeveer $5{,}11 \cdot 10^8$ km^2 en een inhoud van ongeveer $1{,}087 \cdot 10^{12}$ km^3. Je maakt een schaalmodel op schaal 1 : 10.000.000.

Je kunt dan de omtrek, de diameter, de oppervlakte en de inhoud van het schaalmodel berekenen.

Figuur 9

Opgave 20: Schaalmodel van de Aarde

Je ziet in **Toepassen** enkele gegevens van de Aarde.

a Over welke vergrotingsfactor gaat het in de tekst, uitgaande van de planeet Aarde?

b Bereken de omtrek en de diameter van je schaalmodel.

c Bereken de oppervlakte en de inhoud van je schaalmodel.

Opgave 21: Maan en Aarde

De maan past ongeveer 64 keer in de aarde. (Het volume van de aarde is dus ongeveer 64 keer dat van de maan.)

Hoeveel keer zo groot is de diameter van de aarde als die van de maan?

Testen

Opgave 22

Hier zie je een Tesla-S, één van de eerste elektrische auto's, maar dan een versie voor kinderen. Neem aan dat dit een schaalmodel van de Tesla-S is.
De afmetingen van een echte Tesla-S zijn: lengte 498 cm, breedte 195 cm en hoogte 144 cm. Neem aan dat het schaalmodel 65 cm breed is.

a Bereken de schaal waarop dit model is gemaakt.

b Bereken de lengte en de hoogte van het schaalmodel in mm nauwkeurig.

Figuur 10

c De bagageruimte van de Tesla-S is 150 L. Hoeveel L bagageruimte zou het schaalmodel moeten hebben?

Opgave 23

Van twee gelijkvormige flessen heeft de kleinste een inhoud van 1 liter en de grootste van maar liefst 18 liter. De kleinste fles heeft een diameter van 8,3 cm en een hoogte van 32 cm.

a Hoe groot is de diameter van de grootste fles? En de hoogte ervan?

b Ga er van uit dat het glas waaruit beide flessen zijn gemaakt even dik is. Hoeveel keer zo groot is de glasoppervlakte van de grootste fles ten opzichte van de kleinste fles?