8.4 Inhoud ruimtefiguur

Inleiding

Als je zo'n nestkast wilt ophangen, moet hij groot genoeg zijn voor een koolmezengezin. De inhoud ervan is dus belangrijk voor het dierenwelzijn.
Je zult zien, dat hierbij af en toe de stelling van Pythagoras goed van pas komt.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de inhoud berekenen van de volgende ruimtelijke figuren: balk, prisma, cilinder, piramide, kegel.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een nestkast voor een koolmees.
De invliegopening heeft een diameter van 32 mm. De onderkant is een vierkant van 12 bij 12 cm. De opstaande zijvlakken zijn rechthoeken van 12 bij 18 cm. Het voorvlak (met de invliegopening) is een symmetrische vijfhoek waarvan het hoogste punt 24 cm boven het grondvlak ligt.

Figuur 2

a Om de inhoud van dit hokje te berekenen, verdeel je het in balken en halve balken. Beschrijf hoe je dat hier doet.

b Hoe groot is de inhoud van dit vogelhokje? (Houd geen rekening met de dikte van het hout.)

Opgave V2

Stel je eens een brood voor dat in 32 gelijke plakken is gesneden die allemaal 1 cm dik zijn. Elke plak heeft een oppervlakte van ongeveer 18 cm^2.

a Leg uit waarom het volume van elk plakje brood 18 cm^3 is.

b Maakt het verschil welke vorm de plakken brood hebben?

c Hoeveel bedraagt het volume van het hele brood?

d Hoe bereken je de inhoud van een prisma? Wat heeft dit met de voorgaande vragen te maken?

Uitleg 1

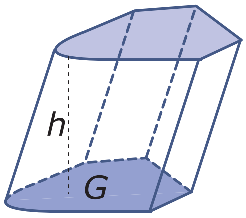
De inhoud (het volume) van een ruimtelijke figuur is het aantal kubussen van $1 \cdot 1 \cdot 1$ dat er in past. Soms heb je daarbij ook delen van zo'n kubus nodig.

Er bestaan lichamen waarvan grondvlak en bovenvlak evenwijdig zijn en dezelfde vorm hebben als elke andere doorsnede evenwijdig aan die vlakken. Van die lichamen bepaal je de inhoud door eerst het grondvlak te bedekken met eenheidskubussen: als de oppervlakte van het grondvlak G is, dan passen er precies G van die eenheidskubussen op.

Vervolgens kijk je hoeveel van die even grote lagen er op elkaar moeten worden gelegd om tot het bovenvlak te komen. Als de hoogte van het lichaam h is, dan passen er precies h lagen op elkaar.

In totaal heb je dan $G \cdot h$ eenheidskubussen (of delen ervan).
De inhoud van zo'n lichaam is daarom $G \cdot h$.

Dit betekent dat de inhoud van een balk, een prisma en een cilinder $G \cdot h$ is.

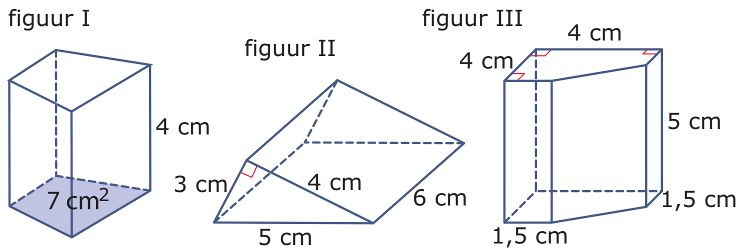


Figuur 3

Opgave 1

Bekijk in **Uitleg 1** hoe je het volume van een prisma uitrekent.

Bereken de inhoud van de volgende figuren.



Figuur 4

Opgave 2

Stel je een cilinder voor met een diameter van 16 cm en een hoogte van 20 cm.

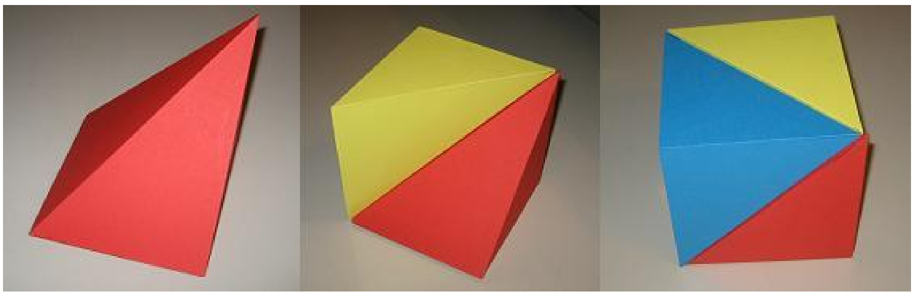
a Wat heeft een cilinder gemeenschappelijk met een prisma?

b Bereken de oppervlakte van het grondvlak van deze cilinder.

c Bereken de inhoud van deze cilinder.

Uitleg 2

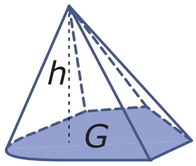
Deze serie foto's is afkomstig van **Wikipedia: Piramide**. Hij laat zien hoe drie gelijke piramides een kubus vormen.



Figuur 5 bron: Wikipedia

Deze vierzijdige piramides hebben een vierkant grondvlak van (bijvoorbeeld) 5 cm en een hoogte die ook 5 cm is. De top zit recht boven een hoekpunt van het grondvlak van zo'n piramide. Drie van die piramides passen in elkaar tot een kubus.

De inhoud van zo'n piramide moet dus wel éénderde van de inhoud van de kubus zijn: $\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.



Figuur 6

Je kunt deze inhoud schrijven als $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin $G = 5 \cdot 5$ de oppervlakte van het grondvlak van de kubus en $h = 5$ de hoogte van de kubus is.
Wiskundigen hebben aangetoond dat de inhoud van figuren die bestaan uit een grondvlak met daarop ribben die allemaal in één punt samenkomen gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

Opgave 3

Bekijk **Uitleg 2**.

a Laat zien dat je de inhoud van elk van de drie piramides die de kubus vormen kunt berekenen met $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

Als je vier van deze piramides met hun hoogtes tegen elkaar zet krijg je een regelmatige vierzijdige piramide met een grondvlak van 10 bij 10 cm en een hoogte van 5 cm.

b Laat zien dat de inhoud daarvan $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ is.

De inhoud van elke piramide is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak en h de hoogte is.

c Bereken de inhoud van een piramide waarvan het grondvlak een rechthoek van 80 bij 60 m en de hoogte 65 m is.

Opgave 4

Stel je een kegel voor met een diameter van 18 cm en een hoogte van 20 cm.

a Wat heeft een kegel gemeenschappelijk met een piramide?

b Bereken de oppervlakte van het grondvlak van deze kegel.

c Bereken de inhoud van deze kegel.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **inhoud van een ruimtelijke figuur** is het aantal kubussen van $1 \cdot 1 \cdot 1$ dat er in past. Soms heb je daarbij ook delen van zo'n kubus nodig.

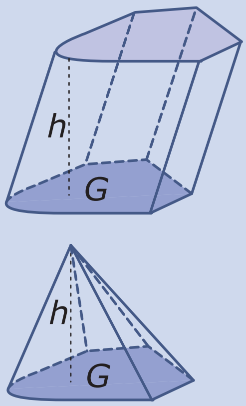
De **inhoud van een balk** is daarom eenvoudig te berekenen: *lengte* × *breedte* × *hoogte*.

Van veel lichamen is de inhoud alleen te berekenen door het in een balkvormige bak water onder te dompelen en dan te bepalen hoeveel het water stijgt. De extra hoeveelheid water is een balk waarvan je weer de inhoud kunt berekenen en dat is dan de inhoud van het lichaam.

De **inhoud van een prisma** is: $G \cdot h$.
De **inhoud van een cilinder** is: $G \cdot h$.

De **inhoud van een piramide** is: $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.

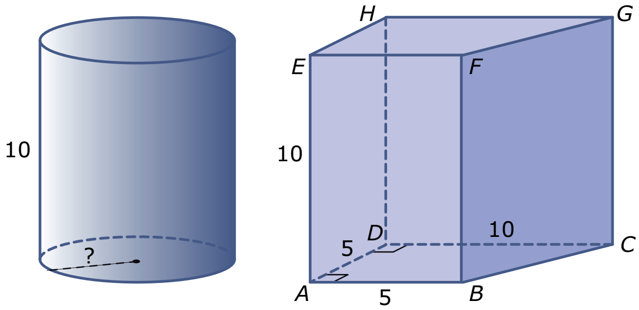
De **inhoud van een kegel** is: $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.



Figuur 7

Voorbeeld 1

Je ziet hier een prisma en een cilinder met dezelfde inhoud en dezelfde hoogte van 10. Het grondvlak van het prisma is een trapezium met twee rechte hoeken.
Hoe groot is de straal van de cilinder?



Figuur 8

Antwoord

Het grondvlak van het prisma heeft een oppervlakte van $G = 37{,}5$.
Het prisma heeft een hoogte van $h = 10$.
De inhoud is $G \cdot h = 37{,}5 \cdot 10 = 375$.

De straal van de cilinder is r dus de oppervlakte van het grondvlak $G = \pi \cdot r^2$.
De cilinder heeft een hoogte van $h = 10$.
De inhoud is $G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Beide inhouden gelijk geeft: $\pi r^2 \cdot 10 = 375$. Hieruit volgt $r \approx 3{,}46$.

Opgave 5

In **Voorbeeld 1** zie je een prisma en een cilinder met dezelfde inhoud.

a Bereken zelf de oppervlakte van het grondvlak van het prisma.

b Uit het gegeven dat beide figuren dezelfde inhoud hebben volgt een vergelijking. Los die vergelijking op.

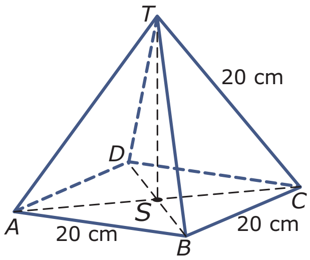
Opgave 6

Van een prisma is het grondvlak een gelijkbenige driehoek met twee zijden van 8 cm en één zijde van 6 cm. De drie opstaande ribben zijn 13 cm.

Bereken de inhoud van dit prisma.

Voorbeeld 2

Dit is een regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$. Grondvlak $ABCD$ is dus een vierkant. Alle ribben zijn 20 cm lang.
Hoeveel bedraagt de inhoud van deze piramide?



Figuur 9

Antwoord

Het grondvlak van deze piramide is vierkant $ABCD$ van 20 bij 20 cm.
De oppervlakte van het grondvlak is dus $G = 400$ cm^2.

De hoogte h van de piramide is de lengte van de stippellijn vanuit T loodrecht op het grondvlak die je in de figuur ziet. Die stippellijn komt uit in punt S, het snijpunt van AC en BD.
Met de stelling van Pythagoras bereken je die hoogte:

- Eerst in ΔASB: $AS = BS = \sqrt{200}$.
- Dan in ΔAST: $TS = \sqrt{200} = h$.

De inhoud van de piramide is dus $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 400 \cdot \sqrt{200} \approx 1886$ cm^3.

Opgave 7

Bekijk **Voorbeeld 2**.

a Bereken zelf de hoogte van de piramide.

b Bereken nu de exacte inhoud van de piramide.

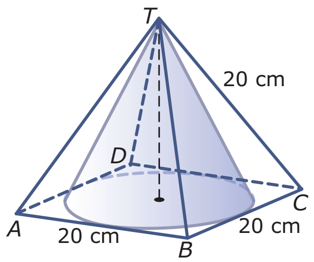
Opgave 8

Van een piramide is het grondvlak een rechthoek van 8 bij 6 cm en de opstaande ribben zijn 13 cm.

Bereken de inhoud van deze piramide.

Voorbeeld 3

In de regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ past precies een kegel met top T. De grondcirkel van die kegel past precies in vierkant $ABCD$. Hoeveel % van de inhoud van de piramide zit buiten de kegel?



Figuur 10

Antwoord

In **Voorbeeld 2** is de hoogte van de piramide (en dus ook de kegel) berekend: $h = \sqrt{200}$.

Ook vind je daar dat de inhoud van de piramide $200\sqrt{200} \approx 1886$ cm^3 is.

De kegel heeft als grondvlak een cirkel met straal 10. De oppervlakte van het grondvlak is $G = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$.

De inhoud van de kegel is $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100\pi \cdot \sqrt{200} \approx 1481$ cm^3.

Omdat $\frac{1481}{1886} \approx 0{,}79$ zit 79% van de inhoud van de piramide binnen de kegel. En 21% zit er dus buiten.

Opgave 9

In een kubus met ribben van 10 cm past precies een cilinder.

Hoeveel procent van die kubus zit buiten de cilinder?

Opgave 10

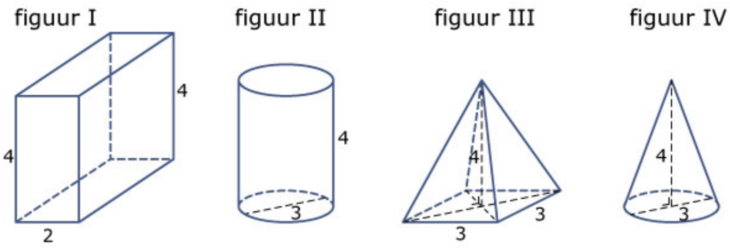
Een regelmatige vierzijdige piramide past precies in een kegel met een diameter van 20 cm en een hoogte van 20 cm.

Hoeveel procent van die kegel zit buiten de piramide?

Verwerken

Opgave 11

Bereken de inhoud van deze vier figuren, waar nodig in twee decimalen nauwkeurig.



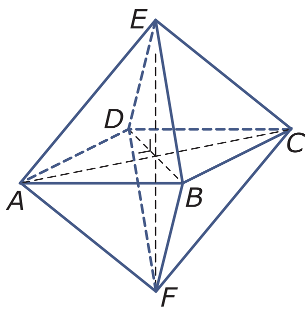
Figuur 11

Opgave 12

Een octaëder bestaat uit twee regelmatige vierzijdige piramides die een gemeenschappelijk grondvlak hebben maar verschillende top, zie figuur. Alle ribben van het octaëder zijn 8 cm.

a Bereken de inhoud van het octaëder.

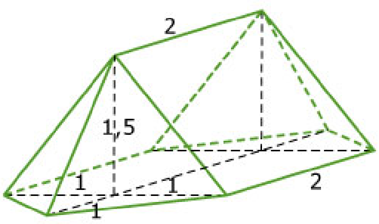
b Bereken de oppervlakte van het octaëder.



Figuur 12

Opgave 13

Hier zie je een tent. De afmetingen zijn in de figuur in meter gegeven. Bereken de inhoud van deze tent.



Figuur 13

Opgave 14

Neem aan dat dit blikje tomatenblokjes zuiver cilindrisch is. De binnenmaten zijn: hoogte 10,4 cm en diameter 7,3 cm. Je ziet dat er 425 milliliter in moet kunnen.

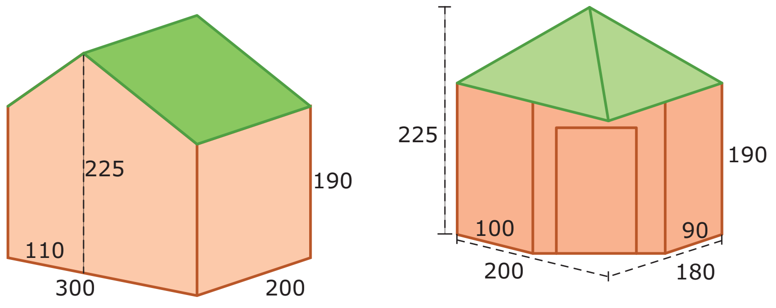
a Bereken de inhoud van dit blik en ga na of er echt 425 milliliter in kan.

b Bereken de oppervlakte van het etiket op het blik.

Figuur 14

Opgave 15

Bereken de inhoud van elk van deze twee tuinhuisjes in m^3 in één decimaal nauwkeurig. Het linker tuinhuisje is een prisma, het rechter tuinhuisje is een hoekblokhut waarvan de onderkant een vijfzijdig prisma is en het dak een vierzijdige piramide met een rechthoekig grondvlak. De afmetingen zijn in centimeter.



Figuur 15

Opgave 16

Stel je moet een miljoen briefjes van € 100 in één keer meenemen. De afmeting van zo'n briefje is 147 bij 82 mm met een dikte van ongeveer 0,05 mm. Het papier weegt 1,2 gram/cm^3.

Hoe ga je dat vervoer regelen? Neem je een schoenendoos, een flinke koffer of een grote vrachtwagen? Licht je antwoord toe.

Opgave 17

Een moderne stoel bestaat uit een gebogen frame waarop een zitting en een rugleuning zijn gemonteerd. Het frame is een gebogen ronde buis met een totale lengte van 8 m. Deze buis heeft een buitendiameter van 20 mm en een binnendiameter van 16 mm. Hij is gemaakt van staal van 7,6 gram per cm^3 en daarna verchroomd.

Hoeveel kg staal is er voor deze stoel nodig?

Opgave 18

Dit ijshoorntje is kegelvormig. Het heeft een hoogte van 13 cm en de fabrikant beweert dat het ijsje een volume van 125 milliliter heeft.

a Hoe groot is dan de diameter van de bovenkant van zo'n ijsje? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

b Hoeveel ijsjes passen er theoretisch in een doos van 6,1 bij 13 bij 24,4 cm? En hoeveel passen er in de praktijk in als alle ijsjes netjes heel moeten blijven?

Figuur 16

Toepassen

Een silo is een opslagplaats voor stort- of bulkgoederen in de vorm van poeders of korrelvormige producten zoals graan, kolen, cement, veevoer, zand, grint, kunstmest, enz. Hier zie je er één in de vorm van een stalen cilinder met een kegelvormige onderkant waar ook de uitstroomopening zit. het geheel staat op vier poten.

De cilinder is (inclusief poten) 3,00 m hoog. De uitstroomopening zit 1,67 m boven de grond en de onderrand van de cilinder zit op 3,07 m boven de grond. De diameter van de cilinder is 1,48 m.

Je kunt berekenen dat er ongeveer 6 m^3 graan in deze silo kan.

Figuur 17

Opgave 19: Graansilo

a Laat zien dat de inhoud inderdaad ongeveer 6 m^3 is.

b Je wilt de silo zelf (dus zonder de poten) rood schilderen. Hoeveel bedraagt de oppervlakte die je moet schilderen?

Opgave 20: Zouttoren

Vroeger werd in Twente naar zout geboord met boortorens die er zo uitzagen als je op deze oude foto ziet. Ze werden gemaakt van hout.

Let niet op de twee bijgebouwtjes op de grond, maar alleen op de toren zelf. Het grondvlak daarvan is een vierkant van 6 bij 6 m, het bovenvlak een vierkant van 2 bij 2 m. De vier opstaande zijvlakken zijn symmetrische trapezia. De hoogte van dit deel van de toren is 20 m. Daar bovenop staat een balk van 2 bij 2 bij 1,5 m.

Bereken de inhoud van de toren zoals die hierboven wordt beschreven.

Figuur 18

Testen

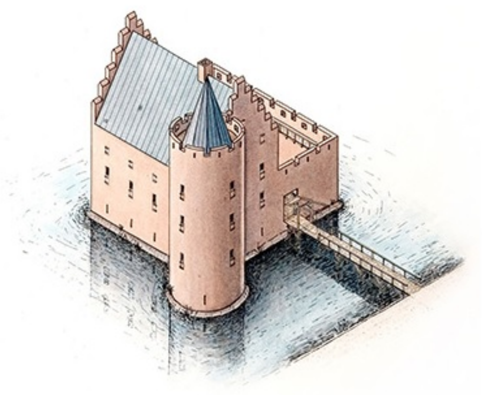
Opgave 21

Van piramide $T.ABCD$ is het grondvlak een vierkant van 6 bij 6 cm. De opstaande ribben AT, BT, CT en DT zijn allemaal 12 cm lang.

Bereken de inhoud van deze piramide in cm^3 in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 22

Het **kasteel Hoensbroek** is in verschillende fasen gebouwd. De figuur hiernaast laat zien hoe het kasteel er in de dertiende eeuw uitzag. Het fundament is een rechthoek van 18,85 bij 16 m. Neem aan dat de toegangspoort op de tekening in een 16 m brede muur zit en dat alle buitenmuren 1 m dik zijn. Neem verder aan dat het woongedeelte een dakgoot heeft op 8 m hoogte boven het fundament en dat de nok van het dak op 12 m hoogte zit. De bodem van het woongedeelte is een rechthoek die de helft van het fundament beslaat en de voor- en achtergevel zijn symmetrisch. De toren heeft een cilindervorm die tegen op de hoek van twee buitenmuren tegen het woongedeelte is gebouwd. De diameter is 4 m en de hoogte (vanaf het fundament tot tot de bodem van het gedeelte waar je achter de kantelen kunt lopen) is 12 m. De torenspits was toen een symmetrische achthoekige piramide met een hoogte van 4 m en een grondvlak met zijden van 1 m dat precies past in een cirkel met een straal van 1,30 m.



Figuur 19 Bron: site kasteel Hoensbroek

a Bereken het totale volume van het woongedeelte inclusief de zolderruimte onder het dak.

b Bereken uit hoeveel m^3 steen de buitenmuur van de toren bestaat. Houd geen rekening met de vensters en met de kantelen.

c Bereken het volume onder het dak van de torenspits.