8.3 Oppervlakte ruimtefiguur

Inleiding

Als je zo'n nestkast wilt bouwen moet je weten hoeveel materiaal ervoor nodig is. Als je hout gebruikt dat overal even dik is, betekent dit dat je de oppervlakte aan hout wilt uitrekenen. Dat kun je vast al.
Je zult zien, dat hierbij af en toe de stelling van Pythagoras goed van pas komt.

Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de oppervlakte berekenen van een ruimtelijke figuur waarvan je een uitslag kunt tekenen.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras, onder andere ook in ruimtelijke figuren.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier een nestkast voor een koolmees.
De invliegopening heeft een diameter van 32 mm. De onderkant is een vierkant van 12 bij 12 cm. De opstaande zijvlakken zijn rechthoeken van 12 bij 18 cm. Het voorvlak (met de invliegopening) is een symmetrische vijfhoek waarvan het hoogste punt 24 cm boven het grondvlak ligt.

Figuur 2

a Teken het voorvlak op schaal 1 : 4.

b Hoe groot is de oppervlakte van dit voorvlak? (Houd geen rekening met de invliegopening.)

Je ziet dat de twee dakdelen oversteken. Ze zijn nog verschillend ook vanwege de dikte van het hout. Omdat het voorvlak ook bovenin bij het hoogste punt een rechte hoek heeft, staan beide dakdelen recht op elkaar.

c Waarom weet je zeker dat bij het hoogste punt van het voorvlak een rechte hoek zit?

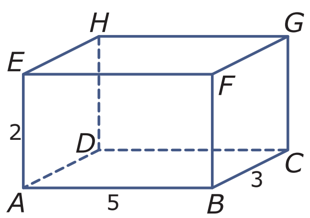
d Hoe ziet het dak van de nestkast er uit? Welke afmetingen heeft dit dak als het aan drie kanten 2 cm oversteekt en het hout 1 cm dik is?

Uitleg

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm. Je wilt de oppervlakte bepalen.
Die oppervlakte is de som van de oppervlaktes van alle afzonderlijke grensvlakken:

- ondervlak en bovenvlak zijn elk $5 \cdot 3 = 15$ cm^2
- voorvlak en achtervlak zijn elk $5 \cdot 2 = 10$ cm^2
- linker en rechter zijvlak zijn elk $3 \cdot 2 = 6$ cm^2

De totale oppervlakte is $2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 = 62$ cm^2.



Figuur 3

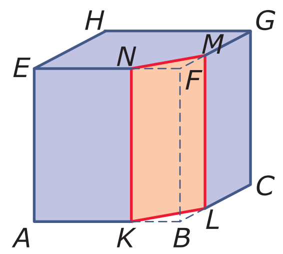
Opgave 1

Je ziet hier een kubus waar een stuk van af is gezaagd. Het zaagvlak is $KLMN$. De kubus heeft ribben van 6 cm. De lijnstukken AK, CL, EN en GM zijn allemaal 4 cm lang. De overblijvende figuur is een prisma.

a Welke vorm heeft het zaagvlak $KLMN$?

b Bereken de lengte van KL.

c Bereken de totale oppervlakte van het prisma.



Figuur 4

Opgave 2

De balk $ABCD.EFGH$ heeft ribben $AB = 12$, $AD = 6$ en $AE = 8$ cm. Punt P is het midden van EF en punt Q is het midden van GH.

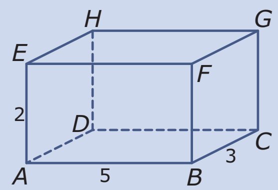
Bereken de totale oppervlakte van het prisma $ABPE.DCQH$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **oppervlakte van een ruimtelijke figuur** is de som van de oppervlaktes van alle afzonderlijke grensvlakken. Dat klinkt niet al te moeilijk, vooral niet als alle grensvlakken (vlakke) veelhoeken zijn. Wanneer de grensvlakken gebogen zijn (zoals bij een bol, een kegel, een cilinder, ...) dan is dat meteen al veel moeilijker. Voorlopig kun je de oppervlakte alleen bepalen van ruimtelijke figuren waar je een **uitslag** van kunt maken.

Bekijk de voorbeelden.

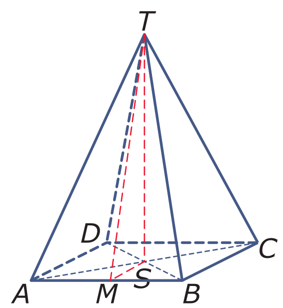


Figuur 5

Voorbeeld 1

Hier zie je een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$ met grondvlak 4 cm bij 4 cm en hoogte 6 cm. Zo'n piramide heet regelmatig omdat het grondvlak een veelhoek waarvan alle zijden en hoeken gelijk zijn en omdat bovendien de top T loodrecht boven het midden S van het grondvlak zit.

Bereken de totale oppervlakte van deze piramide.



Figuur 6

Antwoord

Het grondvlak is $4 \cdot 4 = 16$ cm^2.

De vier opstaande grensvlakken zijn gelijkbenige driehoeken met een basis van 4 cm en een hoogte die je kunt uitrekenen met de stelling van Pythagoras. Ga na dat deze hoogte $\sqrt{40}$ is.

De oppervlakte van één opstaand grensvlak is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{40} = 2\sqrt{40}$ cm^2.

De totale oppervlakte van de piramide is $16 + 4 \cdot 2\sqrt{40} = 16 + 8\sqrt{40}$ cm^2.

Opgave 3

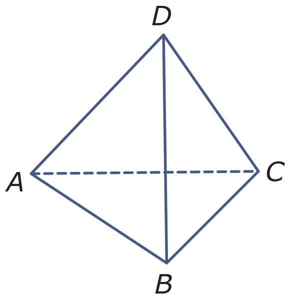
Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de oppervlakte van een piramide berekent.

Bereken zelf de oppervlakte van een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben 10 cm lang zijn.

Opgave 4

Een tetraëder is een regelmatige piramide waarvan alle grensvlakken gelijkzijdige driehoeken zijn. Neem aan dat alle ribben 4 cm lang zijn.

Bereken de oppervlakte van dit tetraëder im mm^2 nauwkeurig.



Figuur 7

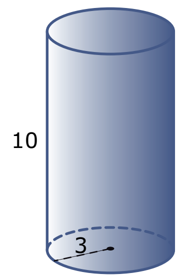
Opgave 5

Van piramide $ABCD.T$ is het grondvlak een vierkant met ribben van 6 cm en ligt de top recht boven punt D. $DT = 4$ cm.

Teken een uitslag van deze piramide en bereken de oppervlakte ervan.

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte van deze cilinder inclusief grondvlak en bovenvlak.



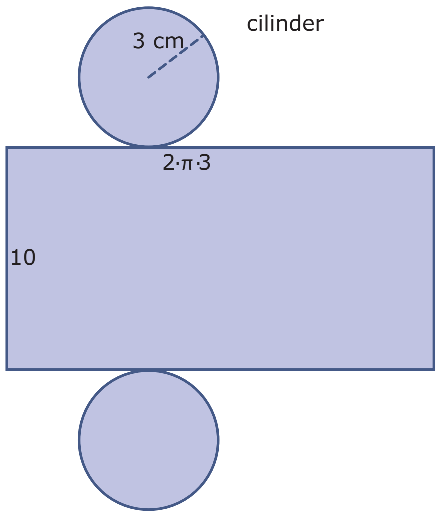
Figuur 8

Antwoord

Het grondvlak en het bovenvlak van deze cilinder zijn cirkels met een straal van 3. Ze hebben daarom elk een oppervlakte van $\pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

Het gebogen zijvlak (de zogenaamde 'mantel' van de cilinder) kun je openknippen en plat voor je neerleggen. De cilindermantel is dan een rechthoek waarvan de lengte gelijk is aan de omtrek van de grondcirkel en de breedte gelijk is aan de hoogte van de cilinder.
De cilindermantel is dus een rechthoek van $2\pi \cdot 3 = 6\pi$ bij 10.
Hij heeft een oppervlakte van $6\pi \cdot 10 = 60\pi$.

De totale oppervlakte van de cilinder is $78\pi \approx 245{,}0$.



Figuur 9

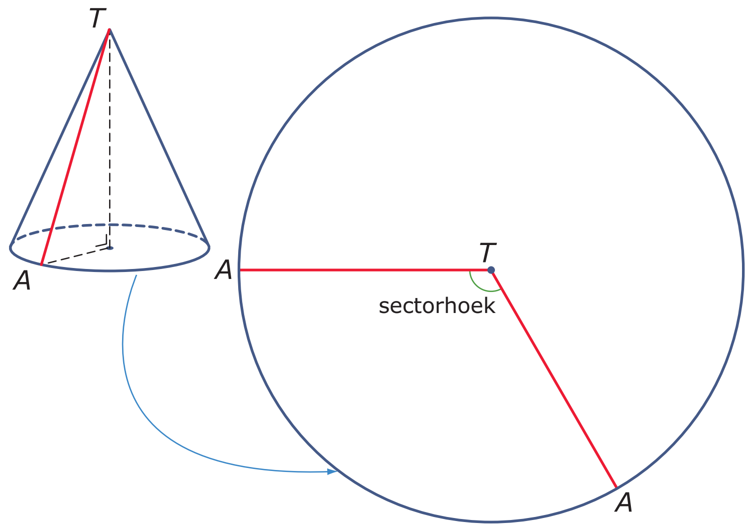
Opgave 6

Een cilindervormige plastic buis heeft een diameter van 16 mm en een lengte van 1 m.

Bereken de oppervlakte van deze buis in mm^2 nauwkeurig.

Opgave 7

Van deze kegel heeft de grondcirkel een diameter van 4 cm. Ga er van uit dat de kegel aan de onderkant open is. Als je deze kegel openknipt langs AT en je vouwt de kegelmantel plat, dan krijg je een cirkelsector met straal AT. Neem aan dat $AT = 6$ cm. Je gaat zelf deze kegelmantel maken.



Figuur 10

a Teken een cirkel met een straal van $AT = 6$ en middelpunt T.

Op de rand van de cirkel die je hebt getekend geef je twee keer het punt A aan. Tussen die twee punten zit een cirkelboog die even lang is als de omtrek van de grondcirkel. Waarom moet dat? Bepaal de grootte van de sectorhoek.

b Knip de juiste sector uit. Vouw hem in elkaar tot je de gewenste kegelmantel krijgt.

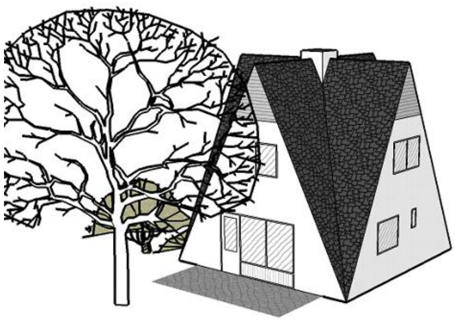
Hoe groot is de oppervlakte van de grote cirkel? En van de kegelmantel?

Je hebt nu de oppervlakte van een kegelmantel berekend. Bedenk wat je daarvoor (in gedachten) moest doen.

c Hoe groot is de oppervlakte van een kegelmantel waarvan de diameter van de grondcirkel 10 cm en de hoogte 12 cm is?

Voorbeeld 3

Bereken de dakoppervlakte van dit huis. Het grondvlak is 8 bij 8 m. De nok van het dak zit 8 m boven de grond. Houd geen rekening met de schoorsteen.



Figuur 11

Antwoord

Het dak bestaat uit 8 rechthoekige driehoeken.
Elk van die driehoeken heeft een rechthoekszijde van 4 m (de halve nok van het dak) en een rechthoekszijde die één van de twee benen van een driehoekige gevel is. De benen van die driehoekige gevels kun je uitrekenen met de stelling van Pythagoras.

Ga na dat ze $\sqrt{80}$ meter lang zijn.

De oppervlakte van één zo'n dakdeel is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{80} = 2\sqrt{80}$ m^2.

Het totale dak heeft een oppervlakte van $8 \cdot 2\sqrt{80} = 16\sqrt{80} \approx 143{,}11$ m^2.

Opgave 8

Bekijk de berekening van de oppervlakte van het dak van het huisje in **Voorbeeld 3**.

a Waaruit blijkt dat de schoorsteen niet is meegerekend? Waarom is dat niet erg als je wilt weten hoeveel dakbedekking er nodig is?

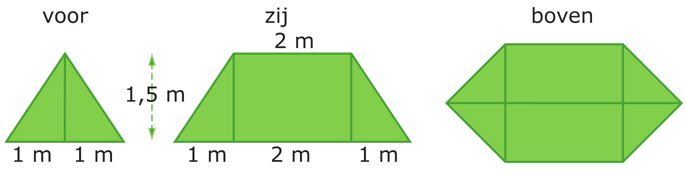
b Reken zelf de lengte van de langste rechthoekszijde van elk dakdeel na.

c Controleer nu de rest van de berekening van de oppervlakte van het dak.

d Tussen twee dakdelen die geen gemeenschappelijke nok hebben zit een dakgoot. Bereken hoe lang die dakgoot is. Houd weer geen rekening met de schoorsteen.

Opgave 9

Hier zie je aanzichten van een eenvoudige tent.



Figuur 12

a Maak een tekening van deze tent en zet alle maten in je figuur. Bereken de lengte van alle ribben die nog niet zijn gegeven.

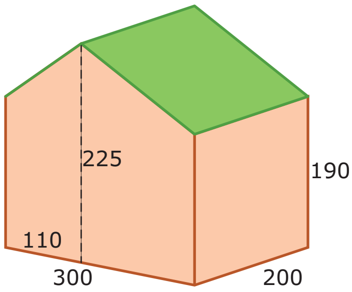
b Bereken hoeveel m^2 tentdoek er voor deze tent nodig is. (Reken het grondzeil niet mee.)

Verwerken

Opgave 10

Je ziet hier een vereenvoudigde tekening van een tuinhuisje. Het grondvlak is een rechthoek, evenals de twee opstaande zijwanden. De voorwand en de achterwand zijn vijfhoeken. Alle afmetingen in de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van dit tuinhuisje en geef je antwoord in m^2 in twee decimalen nauwkeurig.

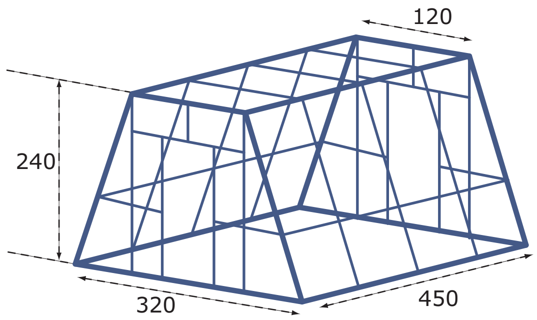


Figuur 13

Opgave 11

Je ziet hier een bijzondere plantenkas. De afmetingen zijn gegeven in cm. De kas heeft de vorm van een symmetrisch prisma en de bodem is uiteraard niet van glas.

Bereken de totale hoeveelheid glas in m^2 die voor deze plantenkas nodig is.



Figuur 14

Opgave 12

Je ziet hier een zogenaamde Romneyloods. Het is een loods in de vorm van een halve cilinder met een diameter van 11 m. De bodem is een rechthoek van 11 bij 20 m.

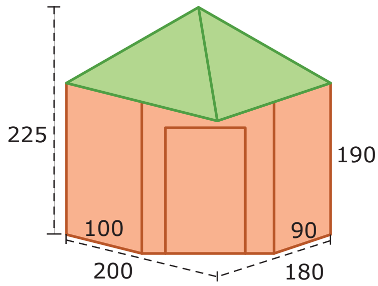
Je hebt zo'n loods laten plaatsen. De halve cilinder die het dak vormt wordt rood geschilderd, de voorkant en de achterkant worden wit gemaakt. Bereken hoeveel m^2 er rood moet worden geschilderd. Omdat het dak van golfplaat is gemaakt moet je er rekening mee houden dat je voor golfplaat ongeveer 1,5 keer zoveel verf nodig hebt per m^2.

Figuur 15

Opgave 13

Dit is een vereenvoudigde tekening van een hoekblokhut. Het dak van die blokhut is een vierzijdige piramide waarvan de top boven het midden van het grondvlak zit. De blokhut zelf is een balk waarvan een hoek is afgesneden om een toegangsdeur in te maken. De afmetingen bij de figuur zijn in cm.

Bereken de oppervlakte van het dak van de blokhut.



Figuur 16

Opgave 14

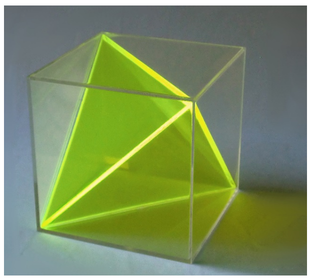
Dit feesthoedje bestaat uit een kegel waarvan de grondcirkel een diameter van 20 cm heeft en de hoogte (de afstand van de top van de kegel naar het middelpunt van de grondcirkel) ook 20 cm is. Let verder niet op de groene sierrand.

Bereken de oppervlakte aan stevig papier die je voor dit feesthoedje nodig hebt.

Figuur 17

Opgave 15

In een kubus met ribben van 6 cm wordt een regelmatig viervlak geplaatst. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van dat tetraëder?



Figuur 18

Toepassen

De gemeente D heeft 240 van deze palen op zijn grondgebied. Ze hebben een vierkant profiel van 70 mm bij 70 mm en zijn 90 cm hoog. De bovenkant is een kunststof kapje. De rood geverfde gedeeltes zijn 20 cm hoog.
Deze palen worden dit jaar van nieuwe witte en rode verf voorzien. Er is 5 liter verf nodig voor 40 m^2.

Hoeveel liter witte verf en hoeveel liter rode verf is nodig om alle paaltjes in deze gemeente te verven?

Figuur 19

Opgave 16: Paaltjes verven

Bekijk het probleem van het verven van de paaltjes.

a Hoeveel oppervlakte witte verf heeft één paal? Hoeveel liter witte verf is er dus nodig?

b Hoeveel oppervlakte rode verf heeft één paal? Hoeveel liter rode verf is er dus nodig?

Opgave 17: Zouttoren

Vroeger werd in Twente naar zout geboord met boortorens die er zo uitzagen als je op deze oude foto ziet. Ze werden gemaakt van hout. Om te berekenen hoeveel hout ervoor nodig is, is nog een behoorlijke klus.

Daarom let je maar beter niet op de twee bijgebouwtjes op de grond, maar alleen op de toren zelf. Het grondvlak daarvan is een vierkant van 6 bij 6 m, het bovenvlak een vierkant van 2 bij 2 m. De vier opstaande zijvlakken zijn symmetrische trapezia. De hoogte van dit deel van de toren is 20 m. Daar bovenop staat een balk van 2 bij 2 bij 1,5 m.

Figuur 20

a Bereken oppervlakte aan hout van de toren zoals die hierboven wordt beschreven.

Je hebt nu een redelijke schatting van de oppervlakte aan hout van het hele bouwwerk, inclusief de voorkanten van de twee bijgebouwtjes. Alleen hun vier zijvlakken ontbreken nog.

b Hoe zou je daarvan nog een goede schatting kunnen maken? Maak een redelijke schatting van de totale oppervlakte aan hout nodig voor zo'n boortoren.

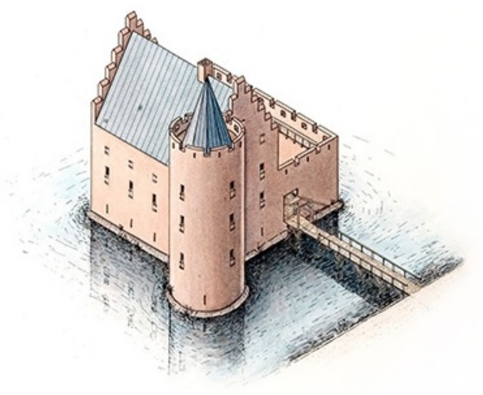
Testen

Opgave 18

Van piramide $T.ABCD$ is het grondvlak een vierkant van 6 bij 6 cm. De opstaande ribben AT, BT, CT en DT zijn allemaal 12 cm lang.

Bereken de oppervlakte van deze piramide in cm^2 in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 19



Figuur 21 Bron: site kasteel Hoensbroek

Het **kasteel Hoensbroek** is in verschillende fasen gebouwd. De figuur hiernaast laat zien hoe het kasteel er in de dertiende eeuw uitzag. Het fundament is een rechthoek van 18,85 bij 16 m. Neem aan dat de toegangspoort op de tekening in een 16 m brede muur zit en dat alle buitenmuren 1 m dik zijn. Neem verder aan dat het woongedeelte een dakgoot heeft op 8 m hoogte boven het fundament en dat de nok van het dak op 12 m hoogte zit. De bodem van het woongedeelte is een rechthoek die de helft van het fundament beslaat en de voor- en achtergevel zijn symmetrisch. De toren heeft een cilindervorm die tegen op de hoek van twee buitenmuren tegen het woongedeelte is gebouwd. De diameter is 4 m en de hoogte (vanaf het fundament tot tot de bodem van het gedeelte waar je achter de kantelen kunt lopen) is 12 m. De torenspits was toen een symmetrische achthoekige piramide met een hoogte van 4 m en een grondvlak met zijden van 1 m dat precies past in een cirkel met een straal van 1,30 m.

a Bereken de oppervlakte van het dak van het woongedeelte.

b Bereken uit hoeveel m^2 de buitenmuur van de toren bestaat. Houd geen rekening met de vensters en met de kantelen.

c Bereken het dakoppervlakte van de torenspits.

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.