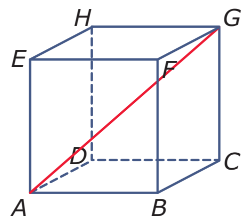
8.2 Lengtes berekenen

Inleiding

Je kent nu de stelling van Pythagoras. Die gebruik je voor het berekenen van lengtes. Dat kun je toepassen in allerlei situaties in twee dimensies, in het platte vlak. Maar je kunt die stelling ook gebruiken in ruimtelijke figuren, in drie dimensies. Vaak moet je dan wel goed zoeken naar geschikte rechthoekige driehoeken. Bekijk deze kubus maar eens. Hoe zou je de lengte van een lichaamsdiagonaal berekenen?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- de stelling van Pythagoras toepassen in berekeningen, onder andere ook in ruimtelijke figuren.

Voorkennis

- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

Verkennen

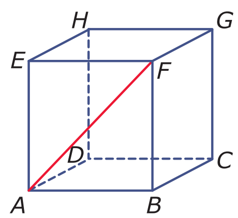
Opgave V1

Van een kubus $ABCD.EFGH$ zijn alle ribben 6 cm. Over de voorkant van deze kubus loopt zijvlaksdiagonaal AF.

a Van welke rechthoekige driehoek is AF de hypothenusa?

b Bereken de lengte van AF in twee decimalen nauwkeurig.

c Hoe lang is zijvlaksdiagonaal AC?



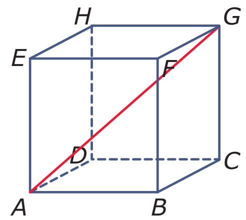
Figuur 2

Opgave V2

Van een kubus $ABCD.EFGH$ zijn alle ribben 6 cm. Dwars door deze kubus loopt lichaamsdiagonaal AG.

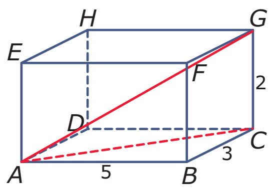
a Van welke rechthoekige driehoek is AG de hypothenusa? (Pak er een draadmodel van een kubus bij.)

b Hoe bereken je de lengte van AG in twee decimalen nauwkeurig?



Figuur 3

Uitleg



Figuur 4

Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek.

Je ziet hier een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm en $AE = 2$ cm. Je wilt de lichaamsdiagonaal AG berekenen.

Je tekent eerst hulplijn AC, driehoek ACG is bij C rechthoekig.
Je berekent eerst de lengte van AC in driehoek ABC.
De stelling van Pythagoras in die driehoek luidt: $AB^2 + BC^2 = AC^2$.
Vul de waarden in die zijn gegeven en bereken AC:
$5^2 + 3^2 = AC^2$
$AC^2 = 34$

$AC = \sqrt{34} \approx 5{,}83$.

De lengte van AG bereken je nu in ΔACG.
De stelling van Pythagoras in die driehoek is: $AC^2 + CG^2 = AG^2$.
Vul de bestaande en gevonden waarden in:

$\left(\sqrt{34}\right)^2 + 2^2 = AG^2$, zodat $AG^2 = 38$ en $AG = \sqrt{38} \approx 6{,}16$.

Opgave 1

Bekijk de berekening van de lichaamsdiagonaal in een balk in de **Uitleg**. Er wordt twee keer gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras.

a Geef aan in welke driehoek de lengte van AC wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?

b Geef aan in welke driehoek de lengte van AG wordt berekend en welke rechte hoek die driehoek heeft?

Een andere lichaamsdiagonaal is DF. Je kunt de lengte van deze lichaamsdiagonaal berekenen in ΔEFD.

c Bereken met behulp van de stelling van Pythagoras in ΔEFD de lengte van lichaamsdiagonaal DF.

Opgave 2

Gegeven is een houten blok in de vorm van balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 20$ cm, $AD = 10$ cm en $AE = 5$ cm.

a Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van A naar F. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

b Een mier kruipt over deze balk via de kortste weg van A naar G. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

c Een houtworm boort door deze balk een kortste weg van A naar G. Hoeveel cm is zijn route? Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

Opgave 3

Hier zie je een pakje frisdrank. Neem aan dat elk van die pakjes de vorm heeft van een balk van 5,5 cm bij 4,0 cm bij 9,5 cm.

In elk van die pakjes zit vlak bij een hoekpunt van het bovenvlak een plek waar je het rietje in kunt steken. Hoe lang moet zo'n rietje minstens zijn?

Figuur 5

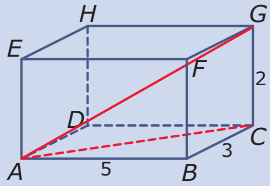
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Met behulp van de stelling van Pythagoras bereken je lengtes van zijden in rechthoekige driehoeken. Dat kun je ook toepassen in ruimtelijke figuren. De moeilijkheid is dan vaak het herkennen van de juiste rechthoekige driehoek. Soms moet je dan eerst een **hulplijn** tekenen...

Je kunt bijvoorbeeld in een balk $ABCD.EFGH$ de **lichaamsdiagonaal** AG berekenen. Dat kan zo:

1. Eerst hulplijn AC berekenen in de rechthoekige driehoek ABC.
2. Vervolgens AG berekenen in de rechthoekige driehoek ACG.

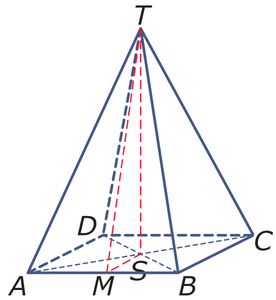


Figuur 6

Voorbeeld 1

Hier zie je een regelmatig vierzijdige piramide $T.ABCD$ met grondvlak 4 cm bij 4 cm en hoogte 6 cm. Zo'n piramide heet regelmatig omdat het grondvlak een veelhoek is waarvan alle zijden en hoeken gelijk zijn en omdat bovendien de top T loodrecht boven het midden S van het grondvlak zit.

Hoe maak je van zo'n piramide een uitslag?



Figuur 7

Antwoord

Ga na dat de hoogte TS van de piramide kleiner is dan de hoogte van de driehoeken TAB, TBC, TCD en TDA. Van ΔTAB is de hoogte TM waarin M het midden van AB is.
Ga na dat $TM^2 = 2^2 + 6^2$.

En dus is $TM = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}3$ cm.
Nu is de uitslag gemakkelijk te tekenen.

Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1** hoe je de uitslag van een piramide tekent. Om de lengte van TM te berekenen, wordt de stelling van Pythagoras gebruikt.

a Welke driehoek wordt gebruikt en welke hoek is dan de rechte hoek?

b Hoe teken je de gewenste uitslag?

Je kunt ook in plaats van TM de lengte berekenen van de vier opstaande ribben AT, BT, CT en DT. Daarvoor moet je echter eerst bijvoorbeeld AS berekenen.

c Doe dat en bereken vervolgens de lengte van AT.

d Hoe teken je nu de gewenste uitslag?

Opgave 5

Van een regelmatige vierzijdige piramide zijn alle zijden 6 cm. De hoogte van elk van de vier opstaande zijvlakken is p en de hoogte van de piramide zelf is h.

a Bereken de hoogte van elk van de vier opstaande zijvlakken.

b Bereken de hoogte van de piramide.

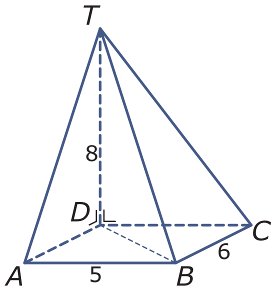
Opgave 6

Van deze piramide is TD de hoogte, dus punt T zit loodrecht boven punt D.

a Bereken de lengte van TC.

b Bereken de lengte van TA.

c Bereken de lengte van TB.



Figuur 8

Voorbeeld 2

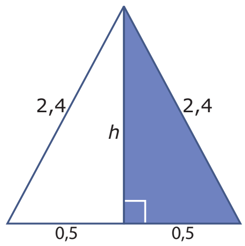
Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren. Nu scharniert hij alleen halverwege. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt 4,80 m. In deze stand staan de poten 1 m uit elkaar.

Hoe hoog komt de ladder nu?

Figuur 9

Antwoord

Bekijk de in het midden scharnierende ladder van de zijkant. Je ziet dan een gelijkbenige driehoek met een basis van 1 m en benen van 2,40 m. De hoogte h is een rechthoekszijde van een rechthoekige driehoek.



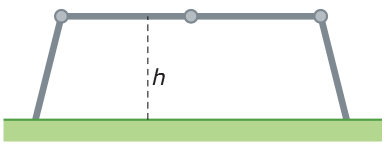
Figuur 10

De stelling van Pythagoras levert op $0{,}5^2 + h^2 = 2{,}4^2$.

En dus is $h = \sqrt{2{,}4^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{5{,}51} \approx 2{,}35$ m.

Opgave 7

Bekijk in **Voorbeeld 2** hoe de hoogte van een scharnierende ladder wordt uitgerekend. Deze ladder kan op drie plaatsen scharnieren waarna de ladder in die stand kan worden vastgezet. Die drie plaatsen zitten op gelijke afstanden van elkaar. De totale lengte van de ladder als hij helemaal uitgeklapt is (en dus nergens scharniert) bedraagt 4,80 m.



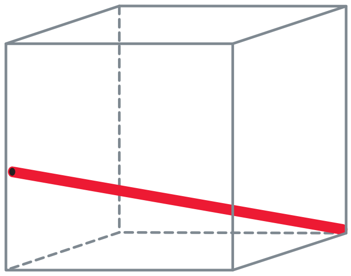
Figuur 11

In het midden scharniert de ladder niet, in de beide andere scharnierpunten wel. (Zie figuur.) De poten van de ladder staan op de grond 3 m uit elkaar. Er ontstaat een soort van loopbrug. Op welke hoogte boven de grond?

Opgave 8

In een glazen plastic bakje is een dun rietje gevallen. Het bakje is een kubus met ribben van 15 cm en het rietje is 23 cm. De éne kant van het rietje zit precies in een hoek van het bakje, de andere kant rust tegen een opstaande ribbe.

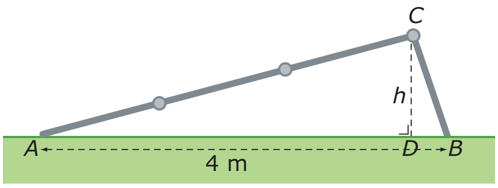
Op welke hoogte boven de bodem van het bakje?



Figuur 12

Opgave 9

Je kunt de scharnierende ladder uit **Voorbeeld 2** ook zo neerzetten als je in de tekening hieronder ziet. De afstanden tussen de scharnierpunten zijn elk 1,20 m. Je wilt weer de hoogte h berekenen die het hoogste punt boven de grond zit. Nu staan de poten van de ladder op de grond 4 m uit elkaar.



Figuur 13

a Dit is geen eenvoudige opdracht. Je kunt er natuurlijk altijd zelf eerst even op puzzelen...

Als je geen oplossing hebt gevonden, loop dan de rest van deze opgave door.

b Stel $DB = p$. Leg uit waarom dan $h^2 = 1{,}2^2 - p^2$ en ook $h^2 = 3{,}6^2 - (4 - p)^2$.

Uit b volgt $1{,}2^2 - p^2 = 3{,}6^2 - (4 - p)^2$.

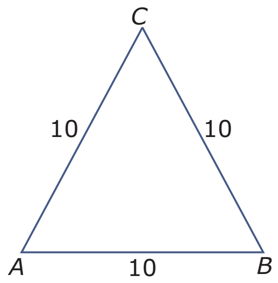
c Los deze vergelijking op.

d Bereken nu h.

Voorbeeld 3

Van een gelijkzijdige driehoek is de omtrek 30.

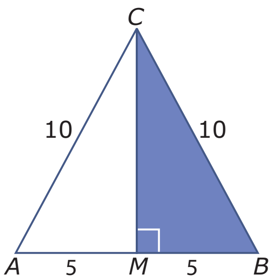
Hoeveel bedraagt de oppervlakte van deze driehoek?



Figuur 14

Antwoord

Voor de oppervlakte van ΔABC moet je een hoogte berekenen, bijvoorbeeld CM.



Figuur 15

In de rechthoekige driehoek MBC geldt:
$CM^2 + MB^2 = BC^2$
$CM^2 + 5^2 = 10^2$

Dus is $CM = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}$ cm.

De oppervlakte van ΔABC is nu $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{75} = 5\sqrt{75}$ cm^2.

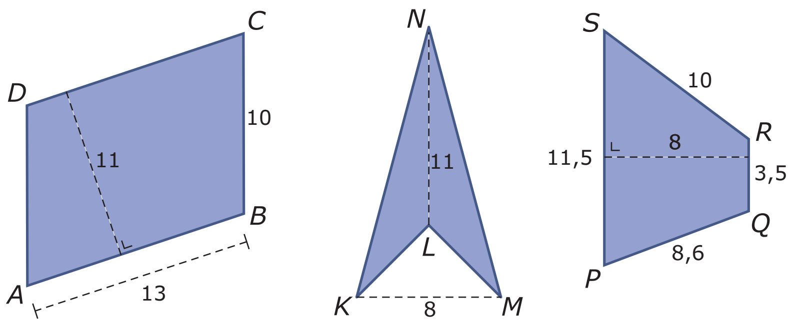
Opgave 10

Een gelijkbenige driehoek heeft een omtrek van 30 cm en een basis van 8 cm.

Bereken de oppervlakte van deze gelijkbenige driehoek.

Opgave 11

Bereken van deze vierhoeken de oppervlakte.



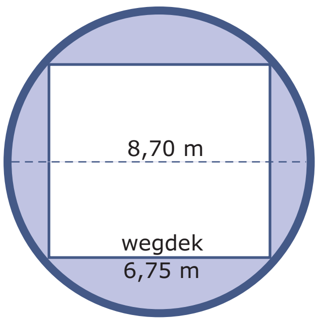
Figuur 16

Opgave 12

De Waaslandtunnel is de oudste voertuigentunnel onder de Schelde die Antwerpen verbindt met de linkeroever van die rivier. De tunnel bestaat uit een cilindervormige buis met een (inwendige) diameter van 8,70 m. Daarin is een wegdek aangelegd met een breedte van 6,75 m. Je ziet hier een vooraanzicht van de tunnelbuis. De rechthoek in de buis stelt de ruimte voor waar het verkeer kan rijden, de rest is afgesloten en bestemd voor allerlei voorzieningen zoals luchtverversing, elektra, e.d.

a Bereken de hoogte van deze rechthoek in cm nauwkeurig.

b Hoeveel procent van de tunnelbuis is niet bestemd voor het verkeer?

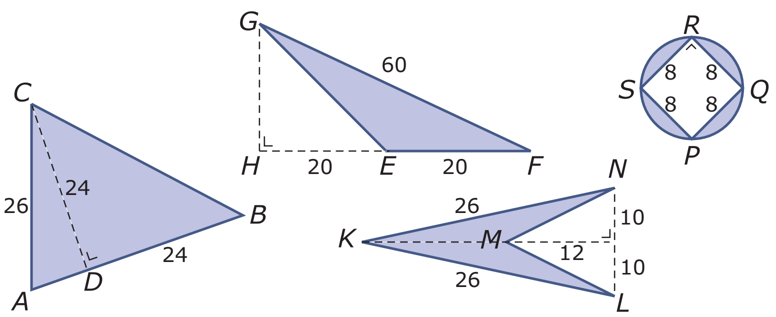


Figuur 17

Verwerken

Opgave 13

Bereken van elk van deze figuren de exacte oppervlakte en de exacte omtrek.



Figuur 18

Opgave 14

Van ΔPQR is $PQ = 4$ cm en $QR = 6$ cm. De oppervlakte van deze driehoek is 6 cm^2.

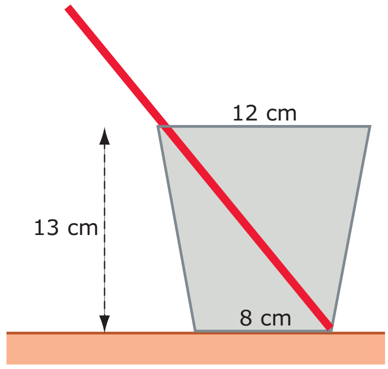
a Neem QR als basis en bereken de bijbehorende hoogte PS van deze driehoek.

b Bereken nu de lengte van PR in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 15

In een glas staat een rietje van 24 cm lengte dat tegen de bovenrand van het glas rust, zie figuur. De diameter van de cirkelvormige bovenrand van het glas is 12 cm en die van de cirkelvormige onderrand is 8 cm. De hoogte van het glas is 13 cm.

Hoe lang is het deel van het rietje dat buiten het glas steekt?

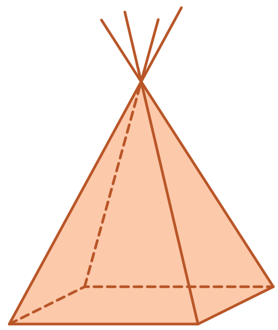


Figuur 19

Opgave 16

Deze figuur stelt een wigwam voor die de vorm heeft van een regelmatige vierzijdige piramide. Het grondvlak is een vierkant met een oppervlakte van 50 m^2. De vier opstaande stokken waarover het tentdoek is gespannen hebben alle vier een lengte van 12 m, waarvan telkens 2 m buiten de wigwam steekt.

Hoe hoog is deze wigwam?



Figuur 20

Opgave 17

De kooi van een lift heeft de vorm van een balk met een breedte van 1,5 m, een diepte van 2 m en een hoogte van 2,5 m.

a Hoe lang is de langste stijve paal die je in die lift kunt vervoeren? Geef je antwoord in meters op één decimaal nauwkeurig.

b Je hebt een onbuigzaam rechthoekig paneel met een breedte van 1,45 en een lengte van 3,15 m. Kan dat in de lift?

Opgave 18

Van een balk $ABCD.EFGH$ is $AB = 200$, $BC = 80$ en $CG = 60$ mm. Punt P is het midden van ribbe AB.

Onderzoek of driehoek HPG rechthoekig is.

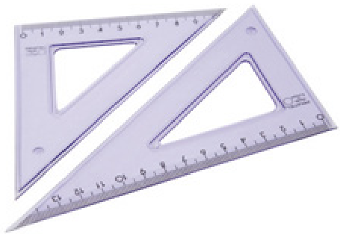
Toepassen

Je ziet hier de twee klassieke tekendriehoeken.

De éne driehoek heeft hoeken van 45°, 45° en 90° en is daarom een gelijkbenige rechthoekige driehoek.
Deze driehoek heeft bij rechthoekszijden van 1 een hypothenusa van $\sqrt{2}$.

De andere driehoek heeft hoeken van 30°, 60° en 90°.
Deze driehoek is een halve gelijkzijdige driehoek en heeft bij een kleinste rechthoekszijde van 1 een lange zijde van 2 en een grootste rechthoekszijde van $\sqrt{3}$.

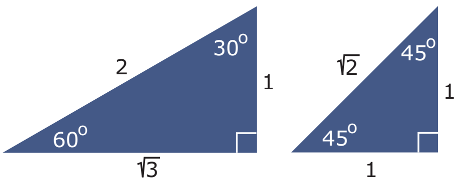
Dit is allemaal te beredeneren met de stelling van Pythagoras...



Figuur 21

Opgave 19: Tekendriehoeken

Hier zie je beide tekendriehoeken nog eens.



Figuur 22

De ene tekendriehoek heeft dezelfde vorm als een geodriehoek.

a Waarom is deze tekendriehoek gelijkbenig?

b Laat bij deze driehoek zien, dat bij rechthoekszijden van 1 de hypothenusa $\sqrt{2}$ is.

c Hoe lang zijn dan de twee rechthoekszijden?

d Waarom betekent dit dat de hypothenusa 2 is als de kleinste rechthoekszijde 1 is?

e Laat nu zien dat de langste rechthoekszijde van de tweede tekendriehoek een lengte van $\sqrt{3}$ heeft.

f Hoe groot zijn de zijden van deze tweede tekendriehoek als de kortste rechthoekszijde een lengte van 15 cm heeft.

Opgave 20: De bolling van de Aarde

De planeet Aarde is (ongeveer) bolvormig en heeft een omtrek van 40000 km. Vat de planeet op als een perfecte bol.

a Bereken de straal van de Aarde in km nauwkeurig.

b Bereken hoe diep de bovenkant van die tunnel in het midden onder het aardoppervlak zou zitten.

Opgave 21: Uitgebreide stelling van Pythagoras

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = a$, $AD = b$ en $AE = c$.

a Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG als $a = 5$, $b = 4$ en $c = 3$.

b Laat zien, dat $AG^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

c Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG als $a = 5$, $b = 4$ en $c = 3$ door de stelling van Pythagoras in drie dimensies toe te passen.

Testen

Opgave 22

Van ΔABC is $AB = 10$ cm en $AC = 6$ cm. De oppervlakte van deze driehoek is 25 cm^2.

a Bereken de hoogte CD van deze driehoek.

b Bereken de lengte van BC in twee decimalen nauwkeurig.

Opgave 23

Gegeven is een balk $ABCD.EFGH$ met $AB = 5$, $AD = 4$ en $AE = 3$.

a Bereken de lengte van lichaamsdiagonaal AG.

b P is het midden van AD. Laat door berekening zien dat ΔPGH rechthoekig is.