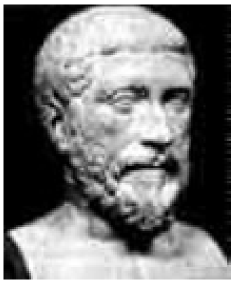
# 8.1 Pythagoras

## Inleiding

Vanuit de oppervlakte van een vierkant kun je met behulp van worteltrekken berekenen hoe lang de zijden ervan zijn. Al eeuwen geleden ontdekte de mens dat je dit kunt toepassen op het berekenen van lengtes. Er ontstond een regel die later de stelling van Pythagoras is genoemd, naar de beroemde wijsgeer **Pythagoras** uit de Griekse oudheid.



**Figuur 1** Pythagoras

**Je leert in dit onderwerp**

- de stelling van Pythagoras kennen en bewijzen;
- berekeningen maken met de stelling van Pythagoras.

**Voorkennis**

- vanuit de oppervlakte van een vierkant de lengte van de zijden berekenen door worteltrekken;
- de oppervlakte van roosterfiguren bepalen;
- de oppervlakte en de omtrek van een (halve) rechthoek, een driehoek, een cirkel en diverse vierhoeken bepalen;
- werken met coördinaten.

## Verkennen

### Opgave V1

Je ziet in de applet een driehoek $ABC$ op een rooster. Op elke zijde is een vierkant getekend. In elk van die vierkanten staat zijn oppervlakte.

**Bekijk de applet**

**a** Controleer de oppervlaktes van die vierkanten.

**b** Hoe bereken je de lengtes van de drie zijden van $\Delta ABC$?

**c** Maak de driehoek rechthoekig. Wat valt je dan op aan de oppervlaktes van de vierkanten?

**d** Controleer of dit telkens klopt als de driehoek rechthoekig is en dat het niet uitmaakt welke hoek recht is.

## Uitleg

**Bekijk de applet: stelling van Pythagoras**

Je hebt bij hopelijk ontdekt dat bij rechthoekige driehoeken de oppervlakte van het vierkant op de langste zijde even groot is dat de oppervlaktes van de vierkanten op de twee andere zijden samen.

Als van $\Delta ABC$ hoek $C$ de rechte hoek is, dan heet de zijde $c$ tegenover die rechte hoek de hypothenusa, dat is de langste zijde. De twee andere zijden, in dit geval $a$ en $b$, zijn rechthoekszijden, want ze liggen op de benen van de rechte hoek.
In de rechthoekige $\Delta ABC$ geldt dan altijd dat:

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

ofwel:

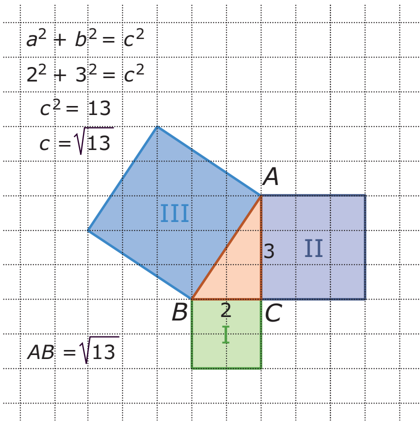
$a^2 + b^2 = c^2$

Dit heet de stelling van Pythagoras. Bijvoorbeeld als $BC = a = 2$ en $AC = b = 3$:

$2^2 + 3^2 = c^2$

dus:

$c^2 = 4 + 9 = 13$ en $c = \sqrt{13} \approx 3{,}61$.




**Figuur 2**

Zo heb je de stelling van Pythagoras gebruikt om de langste zijde van de rechthoekige $\Delta ABC$ te berekenen.

### Opgave 1

Bekijk $\Delta ABC$ in de figuur hierboven.

**a** Welke zijde is de hypothenusa? Hoe heten de andere zijden?

Teken zo'n rechthoekige driehoek met $AC = 5$ cm en $BC = 3$ cm op een rooster met hokjes van 1 cm bij 1 cm.

**b** Reken de oppervlakte van het vierkant op de hypothenusa (de lange zijde) $AB$ uit.

**c** Hoe lang is $AB$? Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

**d** Meet de lengte van $AB$ in de tekening na.

### Opgave 2

Teken op een rooster een rechthoekige driehoek met $AC = 4$ cm en $BC = 3$ cm op ware grootte.

**a** Reken de oppervlakte van het vierkant op de hypothenusa (de lange zijde) $AB$ uit.

**b** Hoe lang is $AB$? Waarom is nu geen benadering nodig?

**c** Meet de lengte van $AB$ in de tekening na.

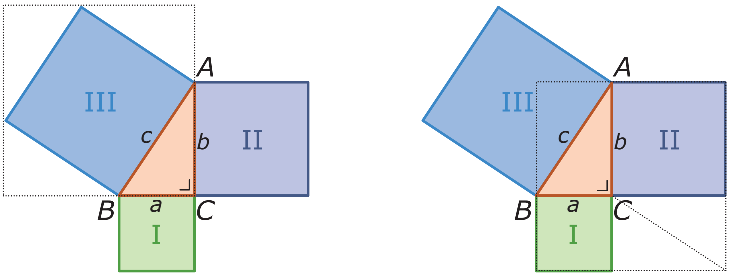
### Opgave 3

Van een rechthoekige driehoek $PQR$ met $\angle Q = 90°$ is $PQ = 12$ cm en $QR = 10$ cm.

Bereken hoe lang $PR$ is in mm nauwkeurig.

### Opgave 4

Je kunt nu de stelling van Pythagoras wel gebruiken, maar hoe zeker ben je er van dat hij altijd correct is? Bekijk daartoe deze twee figuren.




**Figuur 3**

**a** Bekijk eerst de linker figuur. Daarin staat een vierkant met gestippelde zijden. Leg uit dat de oppervlakte van dit vierkant gelijk is aan $(a+b)^2$.

**b** Bekijk nu de rechter figuur. Daarin staat ook een vierkant met gestippelde zijden. Leg uit dat de oppervlakte van dit vierkant ook gelijk is aan $(a+b)^2$.

**c** De oppervlakte van het gestippelde vierkant in de linker figuur is gelijk aan de oppervlakte van vierkant III plus vier gelijke rechthoekige driehoeken die allemaal gelijk zijn aan $\Delta ABC$. Hoe zit dat met de oppervlakte van het gestippelde vierkant in de rechter figuur?

**d** Welke conclusie kun je uit het voorgaande trekken?

**e** Heb je nu de stelling van Pythagoras afdoende bewezen?

## Theorie en voorbeelden

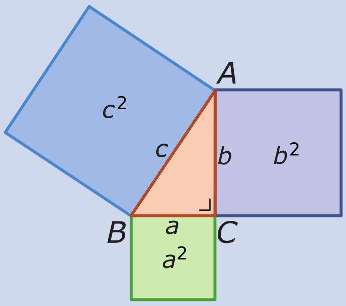
### Om te onthouden

Als van $\Delta ABC$ hoek $C$ de rechte hoek is, dan heet de zijde $c$ tegenover die rechte hoek de **hypothenusa**, dat is de langste zijde. De twee andere zijden, in dit geval $a$ en $b$, noem je **rechthoekszijden**, want ze liggen op de benen van de rechte hoek.
In de rechthoekige $\Delta ABC$ met $\angle C = 90°$ geldt dan altijd dat:

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

ofwel:

$a^2 + b^2 = c^2$




**Figuur 4**

In het algemeen geldt in elke rechthoekige driehoek de **stelling van Pythagoras**:

$(\text{rechthoekzijde})^2 + (\text{rechthoekzijde})^2 = (\text{hypothenusa})^2$

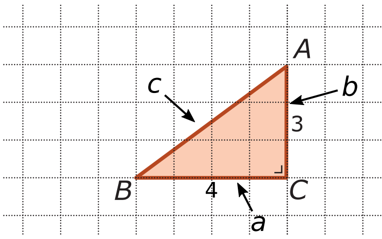
Je kunt deze stelling goed gebruiken om de lengte van een zijde van een rechthoekige driehoek te berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven. In de figuur zie je hoe dat gaat, bekijk ook de voorbeelden.

## Voorbeeld 1

**Bekijk de applet: stelling van Pythagoras**

Je ziet hier de rechthoekige driehoek $ABC$ met $BC = a = 4$ en $AC = b = 3$ en $\angle C = 90°$.

Bereken de lengte van de hypothenusa $AB$.




Figuur 5

Antwoord

De stelling van Pythagoras met $AB = c$ geeft:

$4^2 + 3^2 = c^2$

$16 + 9 = 25 = c^2$

zodat $c = \sqrt{25} = 5$.

Merk op dat de kwadraten van de gegeven rechthoekszijden worden opgeteld. Vierkanten op de zijden tekenen is niet nodig.

### Opgave 5

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 1** nog eens. In deze rechthoekige driehoek is de hypothenusa is steeds zijde $AB$.

**a** Neem $AC = 6$ en $BC = 4$ en bereken $AB$. Laat de wortel in het antwoord staan.

**b** Oefen dit (samen met een medeleerling) voor andere waarden van $AC$ en $BC$.

### Opgave 6

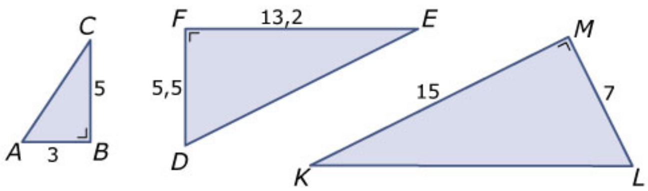
Van een rechthoekige driehoek $PQR$ met $\angle Q = 90°$ is $PQ = 18$ cm en $QR = 30$ cm. Neem als hypothenusa $PR$.

**a** Schets deze driehoek en schat de lengte van $PR$.

**b** Bereken de lengte van $PR$ met behulp van de stelling van Pythagoras in twee decimalen nauwkeurig.

### Opgave 7

Hier zie je drie rechthoekige driehoeken.



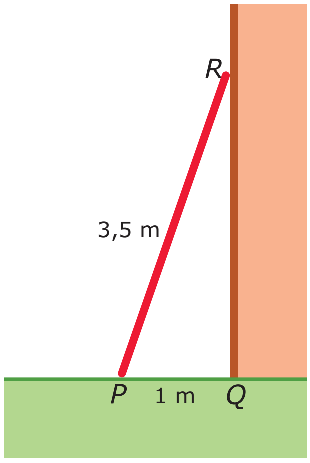

Figuur 6

Bereken in elke driehoek de exacte lengte van de hypothenusa.

## Voorbeeld 2

**Bekijk de applet: ladder tegen muur**

Iemand zet een ladder van 3,5 m schuin tegen de muur van een huis. Hier zie je een zijaanzicht van de situatie. Het punt waar de ladder op de grond staat is 1 m van de muur verwijderd. Hoe hoog komt de ladder?




Figuur 7

Antwoord

Je gaat er van uit dat de muur loodrecht op de grond staat, dus dat $\Delta PQR$ een rechthoekige driehoek is met een rechte hoek bij $Q$. De stelling van Pythagoras in $\Delta PQR$ is:

$(\text{rechthoekzijde})^2 + (\text{rechthoekzijde})^2 = (\text{hypothenusa})^2$

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

Je weet: $PQ = 1$ m en $PR = 3{,}5$ m.
Dan krijg je: $1^2 + QR^2 = 3{,}5^2$.
Dit geeft:
$QR^2 = 3{,}5^2 - 1^2 = 11{,}25$.
En dus is:
$QR = \sqrt{11{,}25} \approx 3{,}35$ m.

### Opgave 8

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 2**.

**a** Zet de voet van de ladder op 1,5 m van de muur. Hoe hoog komt hij nu? Geef het antwoord weer in twee decimalen nauwkeurig.

**b** Je wilt dat de bovenkant van je ladder op 3 m hoogte boven de grond tegen de muur komt. Hoeveel cm moet je de voet van de ladder van de muur zetten?

### Opgave 9

Van een rechthoekige driehoek $PQR$ met $\angle Q = 90°$ is $PQ = 16$ cm en $PR = 30$ cm.

**a** Schets deze driehoek en schat de lengte van $QR$.

**b** Bereken de lengte van $QR$ in twee decimalen nauwkeurig.

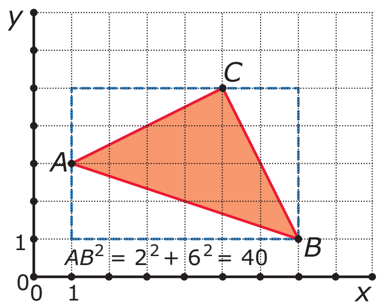
### Opgave 10

Je kunt met de applet in het **Practicum** alleen rechthoekige driehoeken maken.

Maak er één waarvan twee zijden een geheel getal zijn. Reken dan zelf de derde zijde uit in twee decimalen nauwkeurig. Herhaal dit tot je geen fouten meer maakt in de berekening.

## Voorbeeld 3

Met de stelling van Pythagoras kun je ook lengtes van lijnstukken op een rooster berekenen. Je maakt dan een rechthoekige driehoek op de roosterlijnen. Hier zie je hoe de lengte van $AB$ kan worden berekend.
Om te onderzoeken of deze $\Delta ABC$ een rechte hoek heeft, ga je na of de stelling van Pythagoras in die driehoek geldt. Als het kwadraat van de langste zijde gelijk is aan de som van de kwadraten van de twee andere zijden, dan is de hoek tegenover die langste zijde recht.




Figuur 8

**Bekijk de applet: stelling van Pythagoras in een assenstelsel**

### Opgave 11

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**. Je ziet hoe de lengte van $AB$ van een roosterfiguur wordt uitgerekend. Neem een blad roosterpapier.

**a** Maak daarop een assenstelsel met de punten $A(1{,}3)$, $B(7{,}1)$ en $C(5{,}5)$. Bereken zelf de lengte van $AC$ en van $BC$.

**b** Je kunt nu het berekenen van lijnstukken en de zijden van een driehoek oefenen door andere punten $A$, $B$ en $C$ te kiezen. Doe dat tot je geen fouten meer maakt.

Gebruik de applet van **Voorbeeld 3**.

### Opgave 12

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 3**. Je hebt al geleerd hoe je de andere twee zijden berekend.

**a** Waarom weet je zeker dat de $\Delta ABC$ van het voorbeeld rechthoekig is?

**b** Maak nu $\Delta ABC$ met $A(0{,}3)$, $B(10{,}1)$ en $C(9{,}5)$. Waarom weet je zeker dat deze driehoek niet rechthoekig is?

**c** Maak nu $\Delta ABC$ met $A(0{,}3)$, $B(9{,}1)$ en $C(8{,}5)$. Is deze driehoek rechthoekig?

### Opgave 13

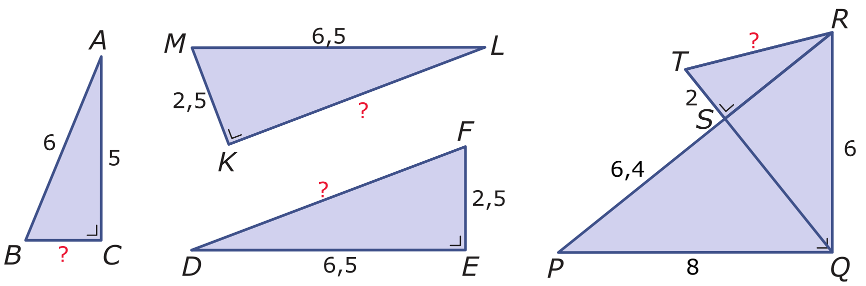
**a** Teken op papier een driehoek met zijden van 4 cm, 5 cm en 6 cm. Waarom weet je zeker dat het geen rechthoekige driehoek is?

**b** Teken op papier een driehoek met zijden van 5 cm, 12 cm en 13 cm. Waarom weet je zeker dat het een rechthoekige driehoek is?

## Verwerken

### Opgave 14

Hier zie je vier figuren met rechthoekige driehoeken.

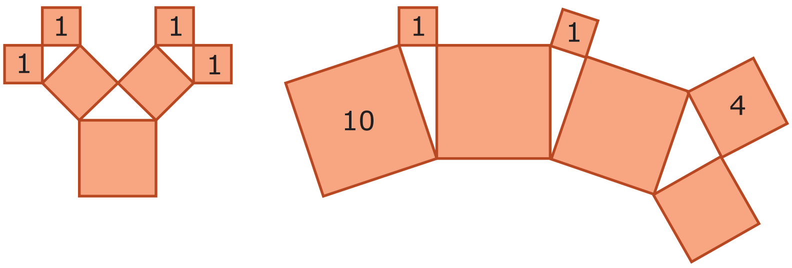



**Figuur 9**

Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

### Opgave 15

Deze twee figuren bestaan uit vierkanten die zo tegen elkaar zijn gelegd dat de tussenruimtes rechthoekige driehoeken vormen. Van sommige vierkanten is de oppervlakte gegeven.




**Figuur 10**

Bereken ook de oppervlakte van de andere vierkanten.

### Opgave 16

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

**a** Driehoek $ABC$ met $AB = 10$, $BC = 7{,}5$ en $AC = 12{,}5$.

**b** Driehoek $DEF$ met $DE = 2$, $DF = 2$ en $EF = 3$.

**c** Driehoek $GHI$ met $GH = 10$, $GI = 26$ en $HI = 24$.

**d** Driehoek $KLM$ met $KL = 5$, $KM = 5$ en $LM = \sqrt{50}$.

### Opgave 17

Een glazenwasser moet een raam op de tweede verdieping wassen. De ladder moet daarvoor op 8 m boven de begane grond tegen de muur komen. De voet van de ladder moet op 2 m van het huis af staan.

Maak een schets van de situatie. Bereken hoe lang zijn ladder moet zijn.

### Opgave 18

Een computer heeft een 17 inch monitor. Dit betekent dat de diagonaal van het zuiver rechthoekige beeldscherm 17 inch is. De hoogte van het beeld is dan 10 inch. 1 inch = 2,54 cm.

Maak een schets van de situatie. Bereken de afmetingen van het beeldscherm. Geef je antwoord in mm nauwkeurig.

### Opgave 19

Op een zuiver vierkante tafel met een zijde van 1,60 m wil iemand een zuiver rond tafelkleed leggen.

Hoe groot moet de diameter van dit tafelkleed minstens zijn om de hele tafel te kunnen bedekken? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

### Opgave 20

Je ziet hier een Zweeds huis. Let op de rode dakpannen van het huis, niet die van de uitbouw aan de voorkant. Stel dat de bovenste verdieping 6 m breed en 10 m lang is. (Die 10 m is de lengte van één dakgoot.) Stel verder dat de nok van het dak 3 m boven het midden van de vloer van de bovenste verdieping zit. Van de gebruikte dakpannen zijn er ongeveer 17,5 nodig per $m^2$ dak.

Hoeveel rode dakpannen zijn er voor dit huis ongeveer nodig?

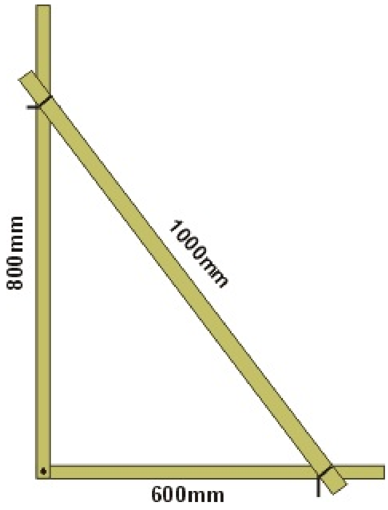
Figuur 11

## Toepassen

In de bouw wordt voor het maken van rechte hoeken soms een bouwhaak gebruikt. Hier zie je er één. Je maakt hem met de zogenaamde 3,4,5-steek.

- Bevestig twee latten met de uiteinden als een hoek aan elkaar. Maak ze vast met een draadnagel, zodat je de latten nog kunt draaien ten opzichte van elkaar.
- Meet op de éne lat 600 mm af $(3 \cdot 200)$ en op de andere 800 mm $(4 \cdot 200)$.
- Meet op een derde langere lat 1000 mm af $(5 \cdot 200)$.
- Schuif de langste lat over de gemaakte hoek tot de maatstrepen precies op elkaar liggen. Nagel de schuine lat vast met 1 of 2 nagels en sla nog een nagel in de haakse hoek.

Je hebt nu een rechte hoek gekregen, want in de driehoek die ontstaat geldt de stelling van Pythagoras. **Bekijk deze videoclip over een rechte hoek uitzetten.**




Figuur 12

### Opgave 21: 3,4,5-steek

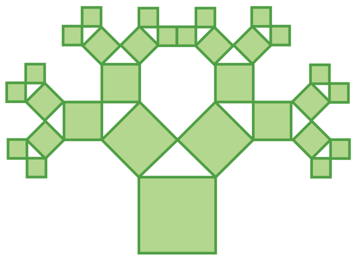
Bekijk hierboven wat de 3,4,5-steek is en hoe die in de bouw wordt gebruikt. Bekijk ook de videoclip over het maken van een rechte hoek in de praktijk.

**a** Laat zien, dat een 3,4,5-driehoek een rechte hoek oplevert.

**b** Laat met een figuur zien hoe je daarmee een 3,4,5-steek maakt. Leg ook uit waarom het niet uit maakt hoe lang dit twaalfknopentouw is.

### Opgave 22: Pythagorasbomen

Je ziet hier het begin van een Pythagorasboom. Hij bestaat uit vierkanten die steeds gelijkbenige rechthoekige driehoeken insluiten. Hij is in 1942 bedacht door de Nederlandse ingenieur en wiskundeleraar Albert Bosman.



Figuur 13

**a** Teken zelf zo'n Pythagorasboom als deze hiernaast. Begin met een grootste vierkant van 4 bij 4 cm. Hoe groot zijn de kleinste vierkanten?

**b** Je kunt je Pythagorasboom nog met volgende stappen uitbreiden, alleen in het midden van de figuur ontstaat een probleem. Welk probleem?

**c** Teken de Pythagorasboom verder tot je vierkantjes hebt van 0,5 bij 0,5 cm.

**d** Het lijkt wel of de totale boom steeds breder en hoger wordt. Is dat ook zo? Of past de hele boom binnen een rechthoek? En welke afmetingen is die rechthoek dan?

### Opgave 23: SvP bewijzen

Een bewijs is een redenering waaruit blijkt dat een bewering altijd waar is. En een bewering waar een bewijs voor bestaat heet dan een stelling. In **Opgave 4** heb je een bewijs van de stelling van Pythagoras gezien.

**a** Bekijk dat bewijs nog eens. Vat samen hoe het bewijs verloopt.

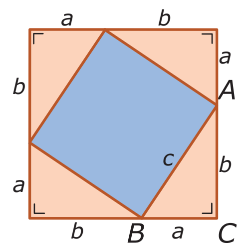
Er bestaan nogal wat bewijzen van de stelling van Pythagoras. Uit de figuur hiernaast kun je nog een bewijs afleiden.

**b** Leg uit dat het grote vierkant een oppervlakte van $A = (a + b)^2$ heeft.

**c** De oppervlakte van het grote vierkant is ook de som van de oppervlaktes van het kleine vierkant en vier rechthoekige driehoeken. Schrijf hierbij een formule op voor $A$ afhankelijk van $a$, $b$ en $c$.

**d** Laat zien (door haakjes uitwerken) dat uit $c$ en $d$ volgt $a^2 + b^2 = c^2$.

**e** Is dit een waterdicht bewijs van de stelling van Pythagoras?

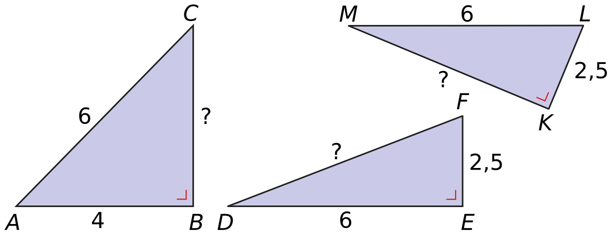



**Figuur 14**

## Testen

### Opgave 24

Hier zie je drie figuren met rechthoekige driehoeken.




**Figuur 15**

Bereken in elke figuur de exacte lengte van de zijde met het vraagteken.

### Opgave 25

Welke van deze driehoeken zijn rechthoekig? Welke hoek is dan recht?

**a** Driehoek $ABC$ met $AB = 26$, $BC = 24$ en $AC = 10$.

**b** Driehoek $DEF$ met $DE = 3$, $DF = 5$ en $EF = 3$.

### Opgave 26

Iemand heeft een bijzonder tafelkleed gekocht en wil er speciaal een tafel voor laten maken. Het is een zuiver rond tafelkleed met een diameter van 2,40 meter. De tafel moet zuiver vierkant worden.

Hoe groot mag de zijde van deze tafel maximaal zijn om volledig bedekt te worden door het kleed? Geef je antwoord in cm nauwkeurig.

## Practicum

In deze applet kun je de punten $A$, $B$ en $C$ verplaatsen. Als je twee zijden van $\Delta ABC$ een gehele waarde geeft, krijgt de derde zijde vaak geen gehele waarde.

- Controleer de benadering van de lengte van die derde zijde met de stelling van Pythagoras.
- Wanneer hebben alle drie de zijden een gehele lengte?

**Bekijk de applet: stelling van Pythagoras gebruiken**