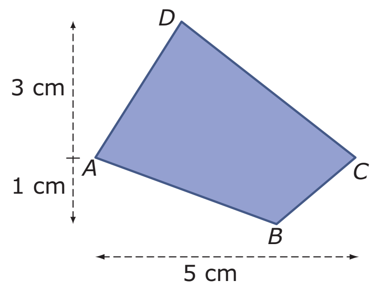
7.3 Oppervlakte van vierhoeken

Inleiding

Hoe bereken je de oppervlakte van een vierhoek?
Hier lukt het vast wel, want er zijn twee punten die op gelijke hoogte liggen. Maar hoe gaat dit in het algemeen met de verschillende soorten vierhoeken?



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- vierhoeken in driehoeken verdelen om daarmee de oppervlakte te berekenen;
- de oppervlakteformule van een parallellogram afleiden en gebruiken.

Voorkennis

- de oppervlakte van roosterfiguren bepalen;
- de oppervlakte van een rechthoek en een driehoek berekenen;
- werken met coördinaten.

Verkennen

Opgave V1

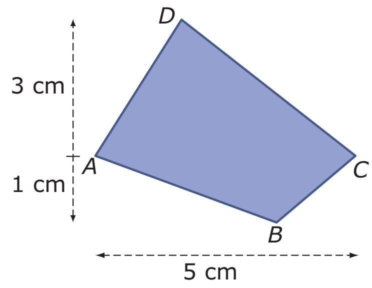
Dit is een vierhoek $ABCD$ waarvan de punten A en C op gelijke hoogte liggen.

a Je kunt deze vierhoek op twee manieren in twee driehoeken verdelen. Laat zien hoe je dat doet.

b Bij welke van deze twee verdelingen kun je de oppervlakte van de driehoeken uitrekenen met de gegeven afmetingen?

c Bereken nu de oppervlakte van de vierhoek $ABCD$.

d Kun je van elke vierhoek op deze manier de oppervlakte berekenen? Leg je antwoord uit.



Figuur 2

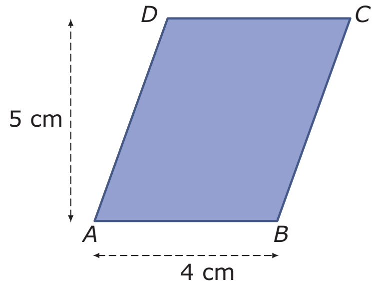
Opgave V2

Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram.

a Je kunt ook van zo'n parallellogram de oppervlakte berekenen door het in twee driehoeken te verdelen. Laat zien hoe je dat doet.

b Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt als je het parallellogram met de andere diagonaal verdeelt.

c Kun je dit parallellogram met behulp van alleen de twee afmetingen in de figuur zelf tekenen?



Figuur 3

Uitleg

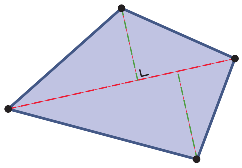
Bekijk de applet.

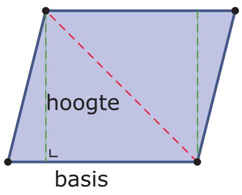
Elke vierhoek kun je verdelen in twee driehoeken.
De oppervlakte van een vierhoek is daarom gelijk aan de som van de oppervlaktes van de twee driehoeken waarin je hem kunt verdelen. Bij bijzondere vierhoeken levert dit eenvoudige formules op voor het berekenen van de oppervlakte.

Is de vierhoek een parallellogram, dan levert het verdelen twee gelijke driehoeken op. De oppervlakte van een parallellogram is daarom precies twee keer de oppervlakte van één van die driehoeken.

oppervlakte (parallellogram) = basis · hoogte

In de voorbeelden zie je ook hoe je de oppervlakte van enkele andere bijzondere vierhoeken zoals de vlieger en het trapezium berekent.





Figuur 4

Opgave 1

Werk met de applet in de **Uitleg**.

a Maak een parallellogram $ABCD$ met basis $AB = 7$ en een hoogte van 5. (Gebruik daarbij handig het rooster). Als je de plaats van A en B hebt gekozen, is er dan nog maar één parallellogram mogelijk?

A. ja
B. nee

b In welke twee gelijke driehoeken kun je je parallellogram verdelen?

c Heeft elk parallellogram met een basis van 7 en een hoogte van 5 dezelfde oppervlakte?

A. ja
B. nee

d Bereken die oppervlakte met de formule voor de oppervlakte van een parallellogram. Controleer vervolgens met het rooster in de applet dat het antwoord correct is.

Opgave 2

Werk met de applet in de **Uitleg**.

a Maak een trapezium $ABCD$ met $AB = 7$ evenwijdig aan $CD = 3$ en een hoogte van 5. Als je de plaats van A en B hebt gekozen, is er dan nog maar één trapezium mogelijk?

b Trek diagonaal BD. In welke twee driehoeken wordt het trapezium hierdoor verdeeld?

c Heeft elk trapezium met deze afmetingen dezelfde oppervlakte?

A. ja
B. nee

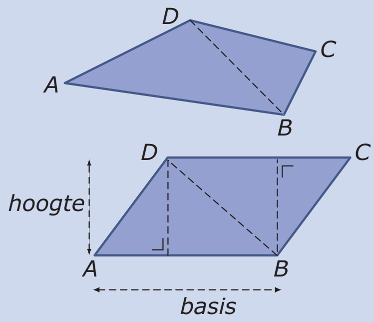
d Bereken die oppervlakte. Controleer vervolgens met de waarde voor de oppervlakte in de applet dat het antwoord correct is.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Elke vierhoek kun je verdelen in twee driehoeken.
De **oppervlakte van een vierhoek** is daarom gelijk aan de som van de oppervlaktes van de twee driehoeken waarin je hem kunt verdelen. Bij bijzondere vierhoeken levert dit eenvoudige formules op voor het berekenen van de oppervlakte.

Is een vierhoek een parallellogram, dan levert het verdelen twee gelijke driehoeken op. De **oppervlakte van een parallellogram** is daarom precies twee keer de oppervlakte van één van die driehoeken.



Figuur 5

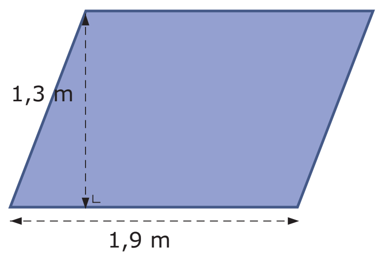
oppervlakte (parallellogram) = *basis* · *hoogte*

Korter: $opp(parm) = b \cdot h$ als b de basis en h de hoogte is.

Ook van andere vierhoeken kun je oppervlakteformules afleiden, bekijk de voorbeelden.

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte van dit parallellogram.



Figuur 6

Antwoord

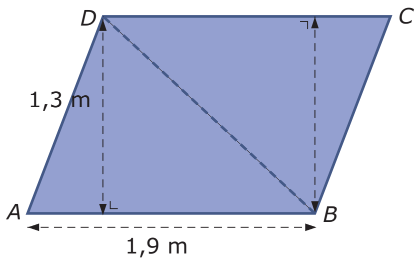
De formule voor de oppervlakte van een parallellogram is:

oppervlakte (parallellogram) = *basis* · *hoogte*

Hier geldt: *basis* = 1,9 m en *hoogte* = 1,3 m

oppervlakte (parallellogram) = 1,9 · 1,3 =2,47 m^2

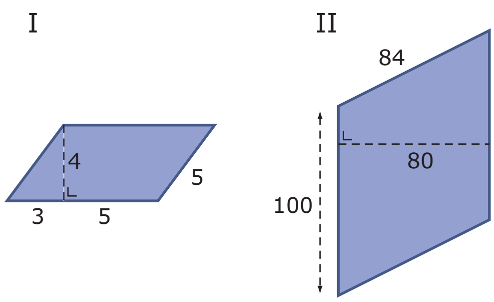
Ben je de formule voor een parallellogram vergeten, dan kun je de figuur ook verdelen in twee driehoeken. Beide driehoeken ABD en BCD hebben dezelfde hoogte (1,3 m) en een even grote basis (1,9 m). Ga na dat je zo dezelfde oppervlakte vindt.



Figuur 7

Opgave 3

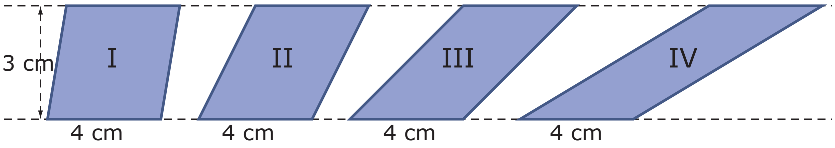
Bereken van deze parallellogrammen de oppervlakte.



Figuur 8

Opgave 4

Bekijk de vier parallellogrammen.



Figuur 9

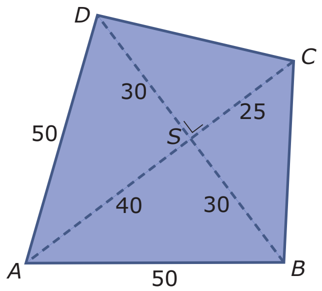
a Bepaal de oppervlakte van parallellogram I.

b Bepaal ook de oppervlakte van de andere drie parallellogrammen.

c Welk van deze parallellogrammen heeft de grootste omtrek?

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte van de vlieger.



Figuur 10

Antwoord

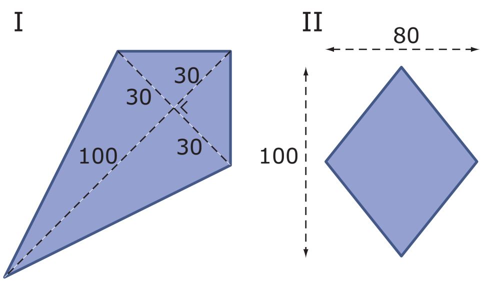
Vlieger $ABCD$ bestaat uit vier rechthoekige driehoeken:

- $\textit{oppervlakte}\ (\Delta ABS) = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 = 600$
- $\textit{oppervlakte}\ (\Delta ASD) = \textit{oppervlakte}\ (\Delta ABS) = 600$
- $\textit{oppervlakte}\ (\Delta BCS) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25 = 375$
- $\textit{oppervlakte}\ (\Delta CDS) = \textit{oppervlakte}\ (\Delta BCS) = 375$

De oppervlakte van de vlieger is daarom $2 \cdot 600 + 2 \cdot 375 = 1950$ eenheden.

Opgave 5

Bereken de oppervlakte van de vlieger en de ruit.



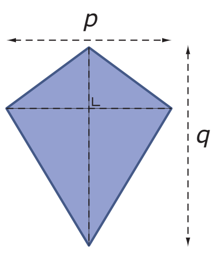
Figuur 11

Opgave 6

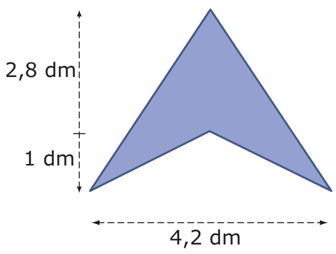
Bekijk de vlieger.

a Laat zien waarom geldt: $\textit{oppervlakte (vlieger)} = \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$

b Bekijk deze ‘pijlpuntvlieger’. Bereken de oppervlakte ervan.



Figuur 12



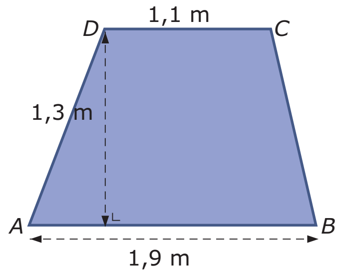
Figuur 13

c Geldt de formule voor de oppervlakte van een vlieger voor elke vlieger? Dus ook voor een ruit bijvoorbeeld?

A. ja
B. nee

Voorbeeld 3

Bereken de oppervlakte van het trapezium.



Figuur 14

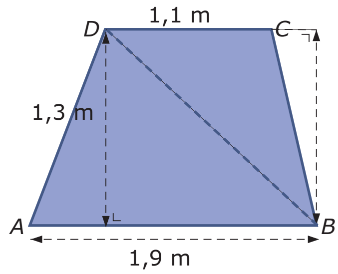
Antwoord

Het trapezium $ABCD$ bestaat uit twee driehoeken met gelijke hoogte. Deze hoogtes zijn aangegeven met de lijnstukken DE en BF.

$\textit{oppervlakte } (\Delta ABD) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}3 = 1{,}235 \text{ m}^2$

$\textit{oppervlakte } (\Delta BCD) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}3 = 0{,}715 \text{ m}^2$

$\textit{oppervlakte (trapezium)} = 1{,}235 + 0{,}715 = 1{,}95 \text{ m}^2$



Figuur 15

Opgave 7

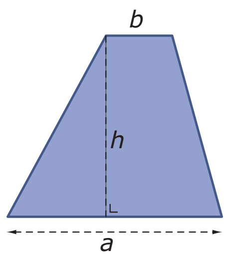
Bekijk de berekening van de oppervlakte van het trapezium nogmaals.

a Teken zelf zo'n trapezium met de gegeven afmetingen en geef daarin de hoogtes van beide driehoeken waarin het wordt verdeeld aan. Kun je maar één zo'n trapezium tekenen?

b Je kunt de oppervlakte van dit trapezium ook berekenen door diagonaal AC te trekken. Laat zien, dat je dan dezelfde oppervlakte krijgt.

Opgave 8

Bekijk het trapezium. Als de lengte van de twee evenwijdige zijden en de afstand tussen die twee zijden is gegeven, kun je de oppervlakte van het trapezium berekenen.



Figuur 16

a Laat zien dat de oppervlakte van dit trapezium gelijk is aan $\frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$.

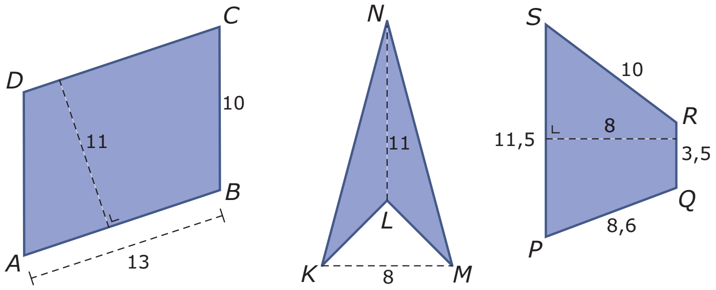
b Bereken, met behulp van de bij a gevonden oppervlakteformule, de oppervlakte van het trapezium uit **Voorbeeld 3**.

c Teken zelf een ‘schuiner’ trapezium waarvan de afstand tussen beide evenwijdige zijden niet binnen het trapezium valt. Kun je nog steeds met dezelfde formule de oppervlakte van zo'n trapezium berekenen?

Verwerken

Opgave 9

Bekijk de drie vierhoeken: een parallellogram, een pijlpuntvlieger en een trapezium.

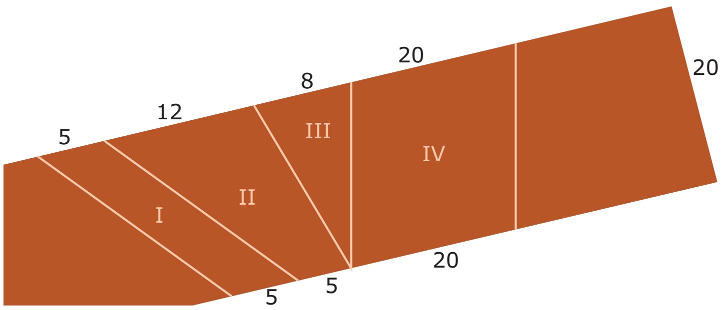


Figuur 17

Bereken de oppervlakte van deze vierhoeken.

Opgave 10

Uit een rechthoekige plank met een breedte van 20 centimeter worden drie vierhoeken en een driehoek gezaagd. Je ziet een deel van deze plank. De vier figuren vormen samen de helft van de oppervlakte van de plank.



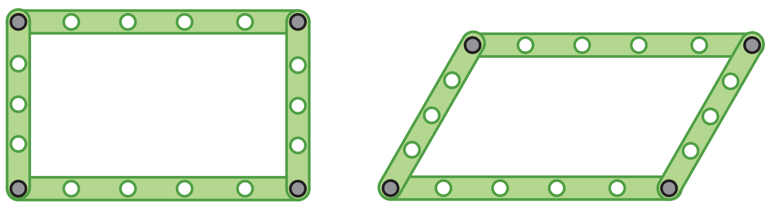
Figuur 18

a Bereken van elk van deze vier figuren de oppervlakte.

b Hoe lang is deze plank in totaal?

Opgave 11

Een rechthoek van metalen strips is te vervormen tot een parallellogram. Zie de figuur.



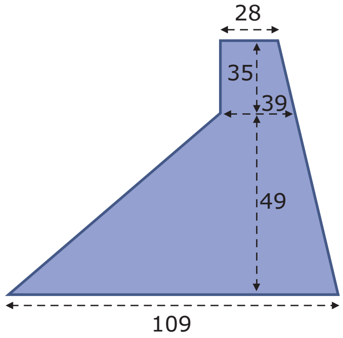
Figuur 19

Alle mogelijke figuren die ontstaan bij het vervormen van deze rechthoek, hebben dezelfde omtrek. Hebben ze ook dezelfde oppervlakte? Licht je antwoord toe.

Opgave 12

Bekijk de figuur. De onderkant en de bovenkant lopen evenwijdig. De linker bovenhoek is een rechte hoek (90°). Alle maten zijn in centimeters.

Bereken de oppervlakte van deze staalplaat.



Figuur 20

Opgave 13

In een rechthoekig assenstelsel zijn de punten $A(-3,-3)$, $B(2,-3)$ en $C(4,4)$ gegeven.

a A, B en C zijn de hoekpunten van parallellogram $ABCD$. Geef de coördinaten van punt D en bereken de oppervlakte van dit parallellogram.

b A, B en C zijn de hoekpunten van trapezium $ABCE$ waarvan $CE = 9$ en CE is evenwijdig met AB. Geef de coördinaten van punt E en bereken de oppervlakte van dit trapezium.

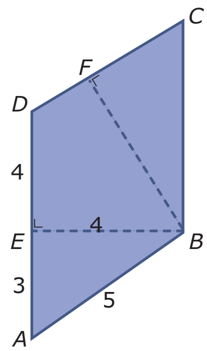
c Je kunt met de gegevens uit b, maar dan met punt F in plaats van E, ook een trapezium $ABFC$ maken. Welke coördinaten heeft punt F in dit geval? En welke oppervlakte heeft dit trapezium?

d A, B en C zijn de hoekpunten van vlieger $ABCG$. Geef de coördinaten van punt G en bereken de exacte oppervlakte van deze vlieger.

Opgave 14

Bekijk het parallellogram $ABCD$.

Bereken de afstand van punt B tot lijnstuk CD, dus de hoogte BF.



Figuur 21

Opgave 15

Van een vierkant is de lengte d van een diagonaal gegeven.

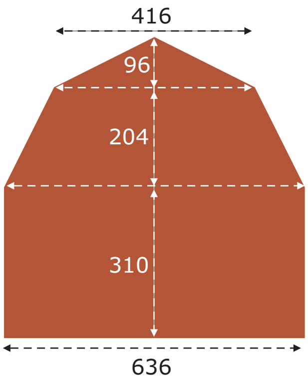
a Stel een formule op voor de oppervlakte van zo'n vierkant.

b Bereken de oppervlakte van zo'n vierkant als $d = 3$.

c Hoe lang zijn de diagonalen van een vierkant met een oppervlakte van 32 eenheden?

Toepassen

Opgave 16: Mansardedak

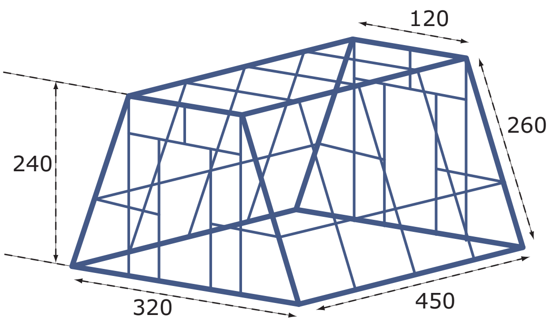


Figuur 22

Dit is een huis met een zogenaamd ‘mansardedak’. Zo'n dak is bedacht om de verdieping van het huis over een grotere breedte beloopbaar te maken. De zijgevel van dit huis heeft de vorm van een lijnsymmetrische zevenhoek en staat loodrecht op de onderkant van het huis. De maten zijn gegeven in centimeters. Bereken de totale oppervlakte van de gevel in m^2 door deze in driehoeken en/of vierhoeken te verdelen. Rond af op één decimaal nauwkeurig.

Opgave 17: Plantenkas

Je ziet een bijzondere plantenkas. De afmetingen zijn in cm gegeven. De kas heeft de vorm van een symmetrisch prisma en de bodem is uiteraard niet van glas.



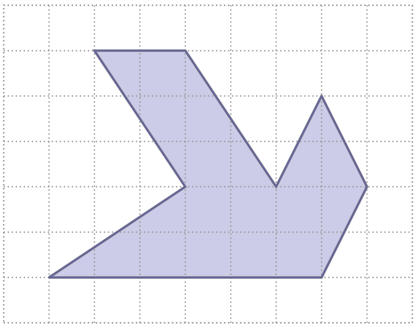
Figuur 23

Bereken de totale hoeveelheid glas die voor deze plantenkas nodig is in m^2. Rond af op één decimaal.

Testen

Opgave 18

Deze figuur kun je opdelen in een trapezium, een parallellogram en een ruit.



Figuur 24

Bereken de totale oppervlakte in roostereenheden van deze figuur.

Opgave 19

Bij een bepaalde vlieger is de ene diagonaal vier maal zo lang als de kortste diagonaal k.

a Geef de formule voor de oppervlakte van zo'n vlieger.

b Hoe lang is de langste diagonaal van zo'n vlieger als de oppervlakte ervan 50 is?

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.