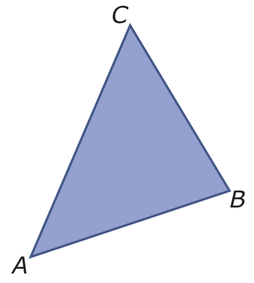
7.2 Oppervlakte van driehoeken

Inleiding

Hoe bereken je de oppervlakte van zo'n driehoek?
Bekijk eerst maar wat eenvoudiger situaties, bijvoorbeeld op een rooster, of met één zijde horizontaal...



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een formule voor de oppervlakte van een driehoek afleiden en gebruiken;
- basis en/of hoogte van een driehoek berekenen vanuit oppervlakte en hoogte en/of basis.

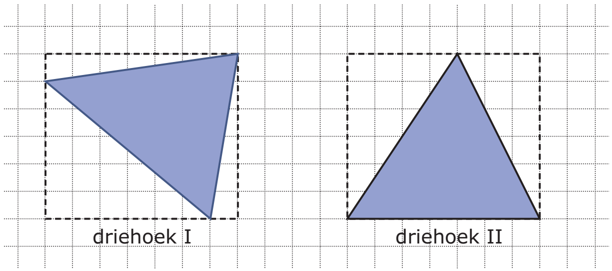
Voorkennis

- werken met formules voor de oppervlakte en de omtrek van een rechthoek en een vierkant;
- werken met variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier twee driehoeken op een cm-rooster. Beide driehoeken zijn omgeven door eenzelfde rechthoek.



Figuur 2

a Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van driehoek I?

b Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van driehoek II?

c Waarom kun je van driehoek II gemakkelijker de oppervlakte bepalen?

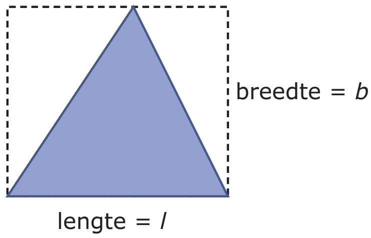
Kennelijk kun je binnen een rechthoek driehoeken maken die verschillen van oppervlakte.

d Denk je dat je driehoeken kunt maken die een grotere oppervlakte hebben dan de helft van de rechthoek?

e Kun je driehoeken maken die een kleinere oppervlakte hebben dan driehoek I en waar toch geen kleinere rechthoek omheen past? Leg je antwoord uit.

Opgave V2

Dit is een driehoek met een rechthoek eromheen waarvan de lengte samenvalt met één zijde van de driehoek.



Figuur 3

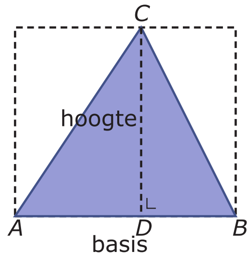
a Gebruik het **werkblad** en laat door de figuur te verdelen zien dat de oppervlakte van deze driehoek altijd de helft van die van de rechthoek is.

b Welke formule voor de oppervlakte A van deze driehoek kun je opschrijven?

c Geldt deze formule voor elke driehoek binnen deze rechthoek als één zijde samenvalt met de lengte van de rechthoek en het derde hoekpunt op de tegenover liggende lengte zit? Leg je antwoord uit.

Uitleg 1

Bekijk de applet.



Figuur 4

Elke driehoek is precies de helft van een rechthoek die je op één van de zijden zet.

De breedte van de rechthoek is de lengte van de basis van de driehoek. De hoogte van de rechthoek is de lengte van de hoogte van de driehoek.

De oppervlakte van ΔABC is de helft van die van de rechthoek op basis AB. De oppervlakte van deze rechthoek is $basis \cdot hoogte = AB \cdot CD$, dus voor de oppervlakte van een driehoek geldt dus:

$$oppervlakte\ (driehoek) = \frac{1}{2} \cdot basis \cdot hoogte$$

Korter: $opp(driehoek) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ als b de basis en h de hoogte is.

Opgave 1

Werk met de applet in **Uitleg 1**.
Bekijk met welke formule je de oppervlakte van een driehoek kunt berekenen.

a Maak binnen de rechthoek op zijde AB een ΔABC met basis $AB = 10$ en hoogte $CD = 7$. Is er maar één zo'n driehoek mogelijk?

A. ja
B. nee

b Heeft elk van deze driehoeken dezelfde oppervlakte? Waarom?

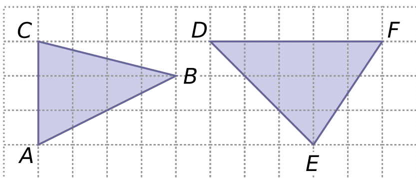
c Bereken die oppervlakte met de formule voor de oppervlakte van een driehoek.

Controleer vervolgens met het rooster in de applet dat het antwoord correct is.

Opgave 2

a Bereken de oppervlakte van ΔABC.

b Bereken de oppervlakte van ΔDEF.



Figuur 5

Opgave 3

Gegeven zijn de punten $A(1,6)$, $B(1,1)$ en $C(5,2)$.

a Teken de punten in een assenstelsel, en teken driehoek ABC.

b Op welke manier kun je in deze driehoek het beste een hoogtelijn te tekenen?

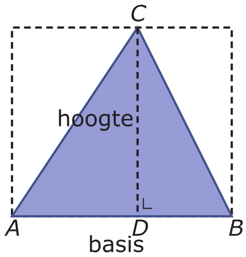
c Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

Uitleg 2

Bekijk de applet: Principe van Cavalieri.

Je hebt geleerd dat de **oppervlakte van een driehoek** de helft is van de oppervlakte van de rechthoek, waarvan de lengte gelijk is aan de basis en de breedte gelijk is aan de hoogte van de driehoek:

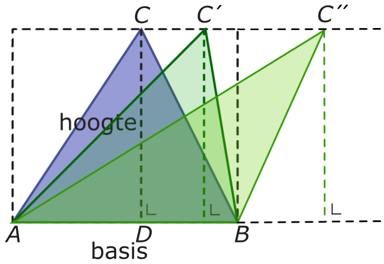
$\textit{oppervlakte (driehoek)} = \frac{1}{2} \cdot \textit{basis} \cdot \textit{hoogte}$



Figuur 6

In de figuur zie je drie driehoeken: ΔABC, $\Delta ABC'$ en $\Delta ABC''$.

Zolang de basis en hoogte niet veranderen, verandert ook de oppervlakte van de driehoek niet. Je kunt dus de vorm van de driehoek veranderen door C evenwijdig aan de basis te verschuiven zonder dat de oppervlakte verandert. Dit heet het **principe van Cavalieri**. Verschuif je hoekpunt C naar C', dan blijft de oppervlakte van beide driehoeken hetzelfde. Oppervlakte ΔABC = oppervlakte $\Delta ABC'$.



Figuur 7

Het principe van Cavalieri blijft ook gelden als één van de hoeken op de basis stomp wordt, zoals bij $\Delta ABC''$ het geval is. De hoogte is dan een lijnstuk buiten de driehoek. In de figuur is dat $C''D$, de (loodrechte) afstand van de top C'' tot het verlengde van de basis AB. De oppervlakte van de driehoeken $\Delta ABC = \Delta ABC' = \Delta ABC''$ blijft gelijk.

Opgave 4

Bekijk in **Uitleg 2**, wat het principe van Cavalieri is.
Neem aan dat in ΔABC geldt $AB = 5$ en $CD = 4$.

a Bereken de oppervlakte van ΔABC met behulp van de oppervlakteformule.

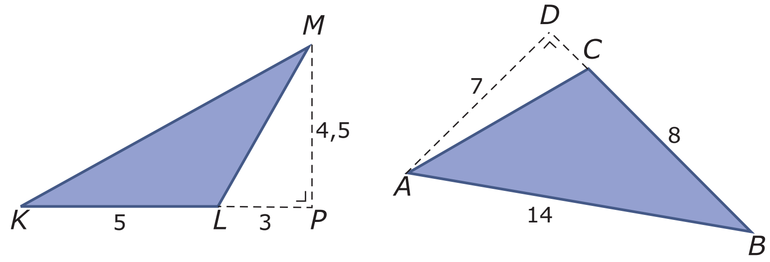
Maakt het uit waar je punt C op de zijde van de rechthoek plaatst?

b Plaats nu punt C op het verlengde van de zijde van de rechthoek. Doe het zo dat $BD = 1$. Laat nu met behulp van rechthoekige driehoeken zien, dat de oppervlakte van ΔABC daardoor niet verandert.

c Laat zien dat de oppervlakteformule ook geldt als ΔABC rechthoekig is. Hoe zit het dan met de hoogte van de driehoek?

Opgave 5

Je ziet hier twee driehoeken KLM en ABC.



Figuur 8

a Bereken de oppervlakte van ΔKLM.

b Bereken de oppervlakte van ΔABC.

Opgave 6

Teken een driehoek FGH met een basis van 6 cm en een oppervlakte van 9 cm^2.

Is er maar één zo'n driehoek mogelijk?

Theorie en voorbeelden

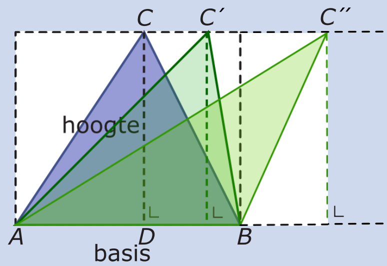
Om te onthouden

Elke driehoek is precies de helft van een rechthoek die je op één van de zijden zet.

De breedte van de rechthoek is de lengte van de **basis** van de driehoek. De **hoogte** van de rechthoek is de lengte van de hoogte van de driehoek.

Voor de **oppervlakte van een driehoek** geldt daarom:

$\textit{oppervlakte (driehoek)} = \frac{1}{2} \cdot \textit{basis} \cdot \textit{hoogte}$



Figuur 9

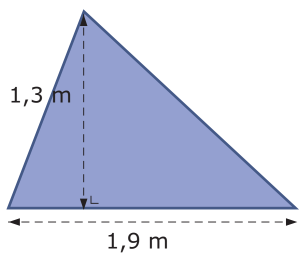
Korter: $opp(driehoek) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$ als b de basis en h de hoogte is.

Zolang basis en hoogte niet veranderen, verandert ook de oppervlakte van de driehoek niet. Je kunt dus de vorm van de driehoek veranderen door C evenwijdig aan de basis te verschuiven zonder de oppervlakte te veranderen. Dit heet het **principe van Cavalieri**.

Het principe van Cavalieri blijft ook gelden als één van de hoeken op de basis stomp wordt.
De hoogte is dan een lijnstuk buiten de driehoek: de (loodrechte) afstand van de top C tot het verlengde van de basis AB.

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte van de driehoek.



Figuur 10

Antwoord

Voor de oppervlakte van een driehoek geldt:

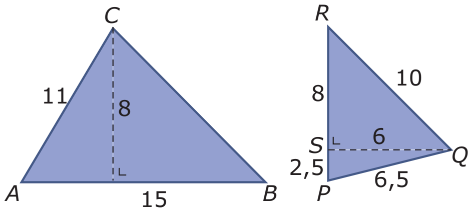
$\textit{oppervlakte (driehoek)} = \frac{1}{2} \cdot \textit{basis} \cdot \textit{hoogte}$

De basis is 1,9 m en de hoogte 1,3 m.

Dus is de oppervlakte van de driehoek: $\frac{1}{2} \cdot 1{,}9 \cdot 1{,}3 = 1{,}235$ m^2.

Opgave 7

Bereken van deze driehoeken de oppervlakte.



Figuur 11

Opgave 8

De punten $A(-3,-3)$, $B(2,-3)$, $C(3,-2)$ en $D(0,3)$ zijn gegeven. Neem 1 cm als roostereenheid.

a Teken ΔABD in een assenstelsel. Bereken de oppervlakte van deze driehoek met behulp van de oppervlakteformule.

b Waarom kun je de oppervlakte van ΔACD niet exact met behulp van de oppervlakteformule berekenen?

c Bereken op een andere manier de exacte oppervlakte van ΔACD.

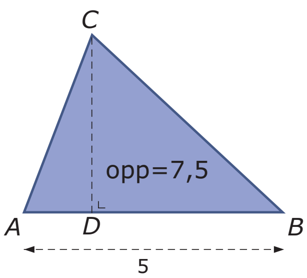
d Meet nu de lengte van AC en meet de afstand van punt D tot AC in millimeters nauwkeurig.

Bereken met die getallen de oppervlakte van ΔACD. Rond af op één decimaal.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet: Hoogte driehoek berekenen

Je ziet ΔABC met $AB = 5$.
De oppervlakte van deze driehoek is 7,5.
Bereken de hoogte CD van ΔABC.



Figuur 12

Antwoord

Voor de oppervlakte van een driehoek geldt:

$\textit{oppervlakte (driehoek)} = \frac{1}{2} \cdot \textit{basis} \cdot \textit{hoogte}$

Vul in: basis is $AB = 5$, hoogte is CD en oppervlakte is 7,5.

$7{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot CD$

Uit het oplossen van deze vergelijking volgt: $CD = 3$.

Opgave 9

Bekijk **Voorbeeld 2**. Je ziet hoe je bij een driehoek met een gegeven oppervlakte en zijde de hoogte op die zijde berekent.

a Laat zien dat de berekende hoogte CD inderdaad 3 is.

b Neem aan dat $AC = 3{,}5$ en bereken hiermee de exacte afstand van B tot AC.

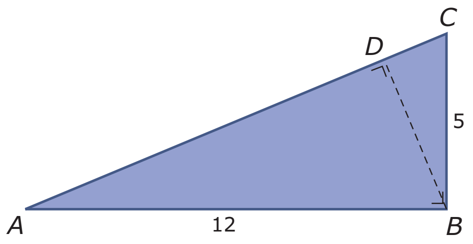
Opgave 10

Je ziet een rechthoekige driehoek ABC. De afmetingen staan in de figuur.

a Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.

b Je kunt lijnstuk BD opvatten als hoogte van deze driehoek. Welke zijde is dan de bijbehorende basis?

c Als je weet dat $AC = 13$, dan kun je met behulp van de oppervlakteformule de hoogte BD berekenen. Laat zien hoe dat gaat.

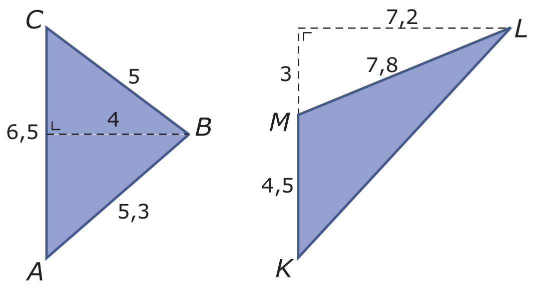


Figuur 13

Verwerken

Opgave 11

Bekijk de twee driehoeken.



Figuur 14

Bereken van beide driehoeken de oppervlakte.

Opgave 12

In een assenstelsel zijn de punten $A(0,-2)$, $B(3,-2)$, $C(2,2)$ en $D(-2,4)$ gegeven.

a Bereken de oppervlakte van ΔABC.

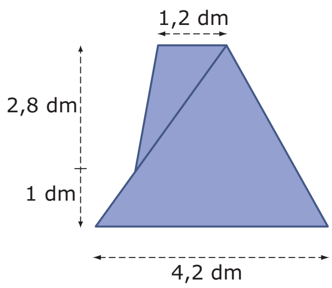
b Bereken de oppervlakte van ΔABD.

c Bereken de oppervlakte van ΔACD.

Opgave 13

De figuur bestaat uit twee driehoeken. De zijden aan de onder- en de bovenkant van de figuur lopen evenwijdig aan elkaar. De afstandslijnen staan loodrecht op elkaar.

Bereken de oppervlakte van de totale figuur.



Figuur 15

Opgave 14

Van een groot driehoekig kleed zijn de zijden 310 cm, 200 cm en 180 cm.

a Teken dit kleed op schaal 1 : 50.

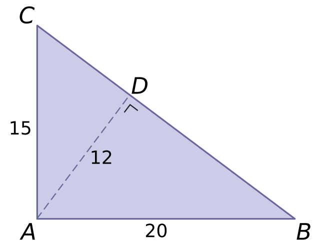
b Bepaal door meten in de figuur en omrekenen de werkelijke hoogte op de langste zijde. Rond af op gehele centimeters.

c Bereken de oppervlakte van dit driehoekige kleed.

d Je kunt ook een andere hoogte opmeten en daarmee de oppervlakte van het driehoekige kleed bepalen. Laat zien dat je dan ongeveer hetzelfde antwoord vindt.

Opgave 15

Bereken de lengte van zijde BC van de rechthoekige driehoek ABC.



Figuur 16

Opgave 16

Teken een ΔABC waarvoor geldt: $AB = 5$ cm, $BC = 7{,}5$ cm, $\angle B$ is een stompe hoek en $opp(\Delta ABC) = 11{,}25$ cm^2.

Toepassen

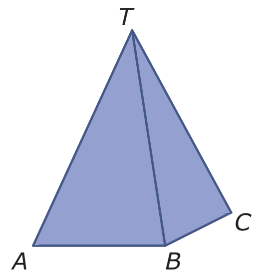
Opgave 17: Oppervlakte van een piramide

Een regelmatige vierzijdige piramide heeft altijd een vierkant grondvlak $ABCD$. De top T zit loodrecht boven het midden van het grondvlak.

In deze regelmatige vierzijdige piramide $ABCD.T$ zijn alle ribben 6 cm.

a Hoeveel draad is er nodig voor een draadmodel van zo'n piramide?

b Hoe groot is de oppervlakte van deze piramide ongeveer? Maak eerst een uitslag en meet de hoogte van de driehoekige grensvlakken. Rond af op gehele cm^2.



Figuur 17

Opgave 18: Heroon van Alexandrië

Een van de vele grote wiskundigen uit de Griekse Oudheid was **Heroon van Alexandrië**. Hij leefde ongeveer van 10 na Christus tot 70 na Christus. Hij heeft een groot aantal formules bedacht, waaronder een formule om de oppervlakte van een driehoek te berekenen aan de hand van de lengtes van de drie zijden. Deze formule staat ook wel bekend als de formule van Heron. Stel dat een driehoek zijden a, b en c heeft, dan luidt de formule: *oppervlakte*$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
Daarbij staat s voor de helft van de omtrek van de driehoek.

a Waarom is de formule $s = \frac{a+b+c}{2}$ juist?

Gegeven is een rechthoekige driehoek met zijden van 3 cm, 4 cm en 5 cm.

b Bereken de oppervlakte van deze driehoek met de bekende formule met basis en hoogte.

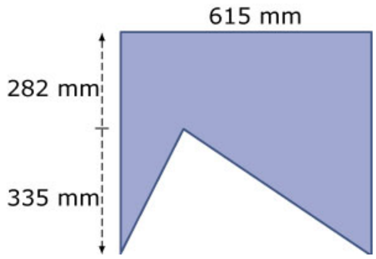
c Bereken de oppervlakte met de formule van Heron. Ga na dat je dezelfde uitkomst krijgt.

d Bereken de oppervlakte van een driehoek met zijden van 12,9 cm, 9,3 cm en 11,8 cm. Rond af op twee decimalen.

Testen

Opgave 19

Bereken de oppervlakte van deze figuur.

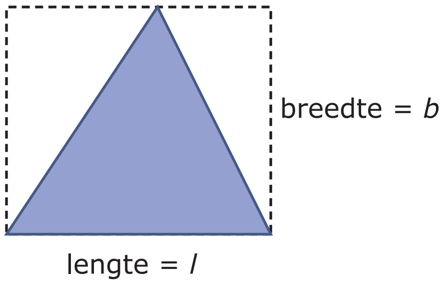


Figuur 18

Opgave 20

Teken een scherphoekige ΔABC waarvoor geldt: $AB = 5$ cm, $BC = 7{,}5$ cm en $opp(\Delta ABC) = 15$ cm^2.

Werkblad bij Opgave V2 op pagina 2.



Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt. Klik op in de marge bij de betreffende opgave. Uw mailprogramma wordt dan geopend waarbij het emailadres en onderwerp al zijn ingevuld. U hoeft alleen uw opmerkingen nog maar in te voeren.

Email: `f.spijkers@math4all.nl`

Met de Math4All Foliostraat kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij `a.f.otten@math4all.nl` een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.