

5.4 Driehoeken

Inleiding

Dit verkeersbord is echt wel symmetrisch. Het heeft ook de vorm van een driehoek. Kennelijk kunnen driehoeken symmetrisch zijn, bijvoorbeeld door gelijke zijden te hebben.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- symmetrie in driehoeken herkennen;
- de eigenschappen van bijzondere driehoeken benoemen en gebruiken.

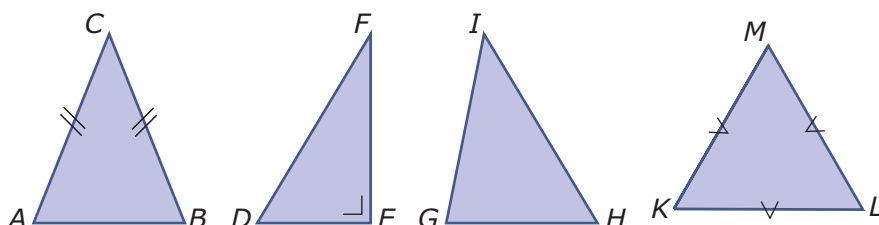
Voorkennis

- de namen en enkele basiseigenschappen van vlakke en ruimtelijke figuren, de hoekensom van een driehoek;
- de begrippen loodrecht, afstand, lengte, oppervlakte, inhoud/volume en werken met eenheden;
- werken met een coördinatenstelsel;
- lijnsymmetrie, puntsymmetrie en draaisymmetrie herkennen, een symmetrieas of symmetriecentrum tekenen en een figuur spiegelen in een lijn of een punt of draaien om een punt over een bepaalde draaihoek.

Verkennen

Opgave V1

Je ziet hier vier driehoeken met de gebruikelijke tekens voor gelijke zijden en een rechte hoek.



Figuur 2

- Welke van deze driehoeken zijn lijnsymmetrisch? Met hoeveel symmetrieassen?
- Welke van deze driehoeken zijn puntsymmetrisch?
- Welke van deze driehoeken zijn draaisymmetrisch? Hoe groot is dan de kleinste draaihoek?

Opgave V2

Bekijk de driehoeken uit [Opgave V1](#).

- Bekijk $\triangle ABC$. Welke gelijke hoeken heeft deze driehoek?
- Bekijk $\triangle KLM$. Welke gelijke hoeken heeft deze driehoek? Hoe groot zijn die hoeken dus?

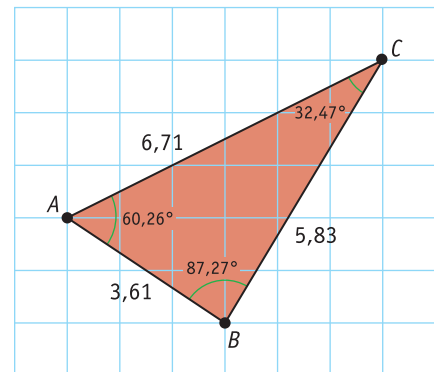
Uitleg

Bekijk de applet: driehoeken

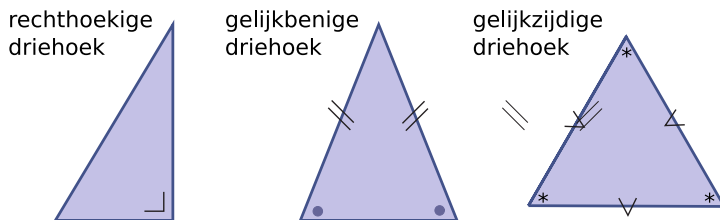
Een driehoek is een veelhoek met drie hoekpunten en drie zijden. Voor driehoek ABC schrijf je ook wel: $\triangle ABC$. De hoeken zijn samen 180° . Soms zijn twee of drie zijden gelijk. De driehoeken zijn dan symmetrisch. Dan zijn ook bepaalde hoeken gelijk omdat de éne helft het spiegelbeeld van de andere helft is. Bijvoorbeeld:

- de gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke zijden en dus één symmetrieas en twee gelijke hoeken;
- de gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke zijden en dus drie symmetrieassen en drie gelijke hoeken;
- de rechthoekige driehoek heeft één rechte hoek.

Bekijk de driehoeken. Gelijke zijden hebben een gelijke markering, gelijke hoeken ook.



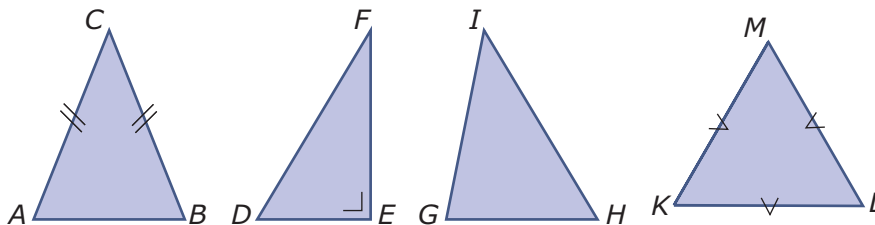
Figuur 3



Figuur 4

Opgave 1

Je ziet vier driehoeken.



Figuur 5

- a Welke driehoeken zijn gelijkbenig? Er zijn meerdere antwoorden mogelijk.
- $\triangle ABC$
 - $\triangle DEF$
 - $\triangle GHI$
 - $\triangle KLM$
- b Welke driehoek is gelijkzijdig?
- $\triangle ABC$
 - $\triangle DEF$
 - $\triangle GHI$
 - $\triangle KLM$
- c "Elke gelijkbenige driehoek is ook gelijkzijdig." Klopt deze uitspraak?
- ja
 - nee

- d En klopt het omgekeerde?
 A. ja
 B. nee
- e Welke driehoek is rechthoekig?
 A. $\triangle ABC$
 B. $\triangle DEF$
 C. $\triangle GHI$
 D. $\triangle KLM$
- f Ken je een rechthoekige gelijkbenige driehoek als gebruiksvoorwerp?

Opgave 2

Bekijk de drie soorten bijzondere driehoeken in de **Uitleg**.

- a Teken een gelijkbenige driehoek met daarin de symmetrieas.
 b Als een gelijkbenige driehoek precies één hoek van 30° heeft, hoe groot zijn dan de andere twee hoeken?
 c Teken een gelijkzijdige driehoek met daarin de symmetrieassen.
 d Hoe groot zijn de hoeken van een gelijkzijdige driehoek?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden



Figuur 6

Een **rechthoekige driehoek** heeft twee zijden die de rechte hoek vormen; je noemt ze **rechthoekszijden**. De langste zijde heet de **hypotenusa**. Elke rechthoekige driehoek is de helft van een rechthoek. De kenmerkende eigenschappen zijn:

- Er is precies één rechte hoek.
- De twee scherpe hoeken zijn samen 90° .

Een **gelijkbenige driehoek** heeft twee zijden die even lang zijn. De hoek tussen deze benen heet de **tophoek**. De andere zijde heet de **basis**. Elke gelijkbenige driehoek heeft een symmetrieas. De kenmerkende eigenschappen zijn:

- De twee benen zijn even lang.
- De twee hoeken op de basis zijn even groot, ze heten de **basishoeken**.
- De symmetrieas deelt de basis in twee gelijke delen en staat er loodrecht op.

Bij een **gelijkzijdige driehoek** zijn alle drie de zijden even lang. De kenmerkende eigenschappen zijn:

- De drie hoeken zijn even groot, elk 60° .
- Er zijn drie symmetrieassen.
- Elke symmetrieas deelt een zijde in twee gelijke delen en staat er loodrecht op.

Voorbeeld 1

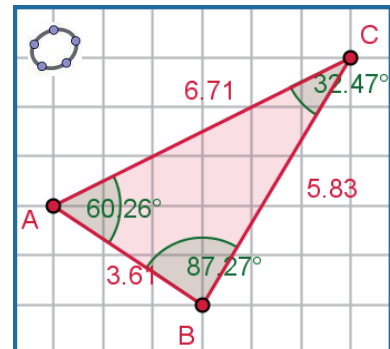
Bekijk de applet

Bekijk de rechthoekige $\triangle ABC$.
 A , B en C zijn roosterpunten.

Hoeveel graden zijn de twee scherpe hoeken van een rechthoekige driehoek samen?

Antwoord

Omdat de hoeken van een driehoek opgeteld altijd 180° zijn en de rechte hoek altijd 90° is, weet je zeker dat de twee scherpe hoeken samen ook 90° zijn.



Figuur 7

Opgave 3

- Teken een rechthoekige $\triangle ABC$ waarin $\angle A$ de rechte hoek is en $\angle C = 70^\circ$.
Leg uit hoe je de grootte van $\angle B$ kunt uitrekenen.
- Teken een rechthoekige $\triangle ABC$ waarin $\angle A$ de rechte hoek is en $AC = 3$ en $AB = 6$. Hoe groot is de oppervlakte van de driehoek?

Opgave 4

Teken een rechthoekige driehoek met een hypotenusa van 6,5 cm en een rechthoekszijde van 6 cm.

Voorbeeld 2

Bekijk de applet

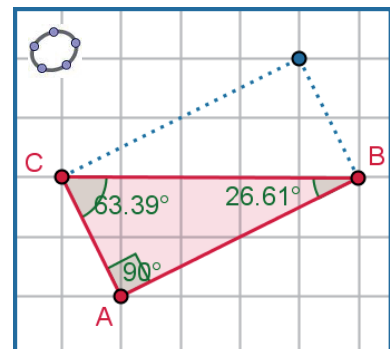
Bekijk de gelijkbenige $\triangle ABC$.
 A , B en C zijn roosterpunten.

De basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn altijd gelijk.
 Hoeveel graden zijn de basishoeken A en B als de tophoek $\angle C = 40^\circ$?

Antwoord

De hoeken van een driehoek zijn samen altijd 180° . Als de tophoek 40° is, zijn de twee basishoeken samen $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Per basishoek is dat $\frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$.



Figuur 8

Opgave 5

Bekijk de gelijkbenige driehoek in **Voorbeeld 2**.

- Maak $\angle C = 70^\circ$. Leg uit hoe je nu de grootte van $\angle B$ kunt uitrekenen.
- Teken op papier een gelijkzijdige driehoek met zijden van 6 cm.

Opgave 6

Teken een gelijkbenige driehoek met twee benen van 6 cm en twee basishoeken van 70° .

Voorbeeld 3

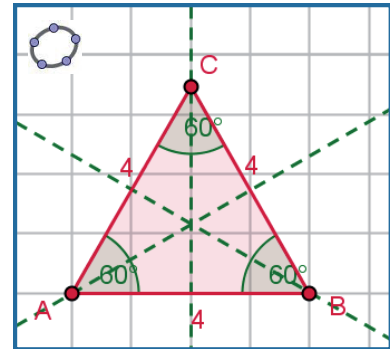
Bekijk de applet

Bekijk de gelijkzijdige $\triangle ABC$.

Hoeveel symmetrieassen heeft de gelijkzijdige driehoek?

Antwoord

Een gelijkzijdige driehoek heeft altijd exact drie symmetrieassen. Een symmetrieas loopt door een hoekpunt en deelt de overliggende zijde in twee delen.



Figuur 9

Opgave 7

Bekijk de gelijkzijdige driehoek in **Voorbeeld 3** nog eens.

- a Als A een roosterpunt is, hoe kun je er dan voor zorgen dat de zijden van de gelijkzijdige driehoek allemaal een geheel getal worden? Is C dan ook een roosterpunt?

S is het snijpunt van de drie symmetrieassen.

- b Welke hoeken maken de symmetrieassen in S met elkaar?
 c Wat voor soort driehoek is $\triangle ABS$?

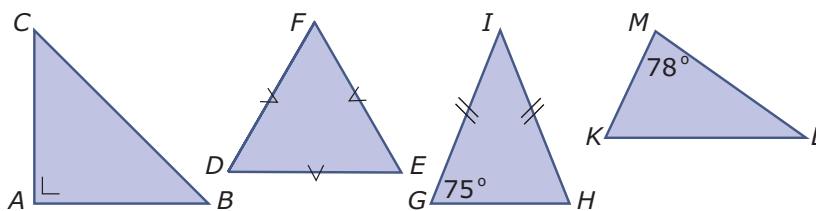
Opgave 8

Teken een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm en noem de middens van de zijden K , L en M . Wat voor driehoek is $\triangle KLM$? Licht je antwoord toe.

Verwerken

Opgave 9

Je ziet vier driehoeken. In de driehoeken is aangegeven welke lijnstukken gelijk zijn.



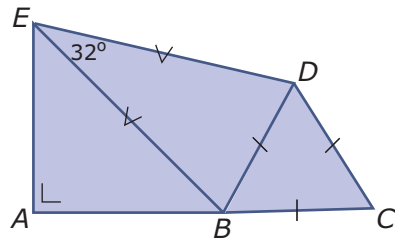
Figuur 10

Bereken de hoeken van deze driehoeken.

Opgave 10

Deze figuur bestaat uit drie driehoeken. In de figuur is aangegeven welke lijnstukken gelijk zijn.

- a Welke driehoek is gelijkbenig? Er zijn meerdere antwoorden mogelijk.
 - A. $\triangle ABE$
 - B. $\triangle BDE$
 - C. $\triangle BCD$
- b Welke driehoek is rechthoekig?
 - A. $\triangle ABE$
 - B. $\triangle BDE$
 - C. $\triangle BCD$
- c Welke driehoek is gelijkzijdig?
 - A. $\triangle ABE$
 - B. $\triangle BDE$
 - C. $\triangle BCD$
- d $\angle ABC$ lijkt een gestrekte hoek. Is dat ook zo?

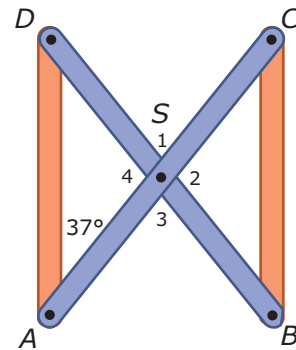


Figuur 11

Opgave 11

Deze boekenkast heeft voor de stevigheid twee even lange stangen aan de achterkant die in het midden aan elkaar vastzitten, $\angle A = 37^\circ$.

Bereken de twee verschillende hoeken die beide stangen met elkaar maken.

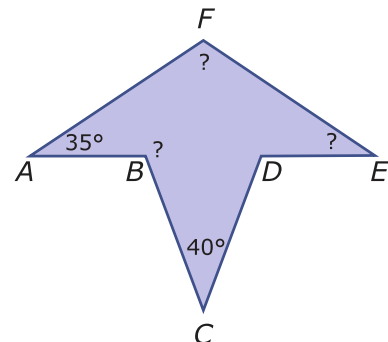


Figuur 12

Opgave 12

Deze figuur is lijnsymmetrisch. Hij bestaat uit twee driehoeken.

Bereken de hoeken waar een vraagteken in staat.



Figuur 13

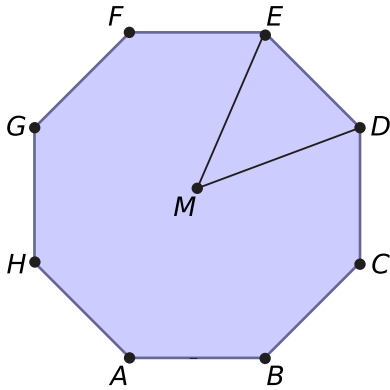
Opgave 13

In elke driehoek ABC met $AC = BC$ is de lijn die door het midden M van AB gaat en daar loodrecht op staat de bissectrice van $\angle C$.

Beredeneer waarom dit zo is.

Opgave 14

Van een regelmatige achthoek $ABCDEFGH$ zijn alle hoeken en alle zijden gelijk. Vanuit het centrum M kun je lijnen trekken naar de hoekpunten. Zo verdeel je de achthoek in acht driehoeken.



Figuur 14

- Wat voor soort driehoek is $\triangle DEM$?
- $\angle DME$ is 45° . Hoe groot is dan $\angle MDE$?

Toepassen

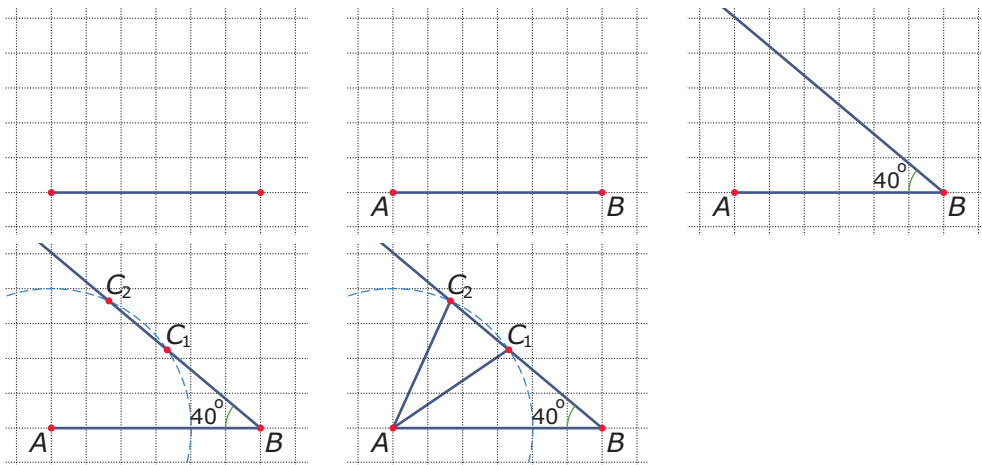
In constructies die sterk moeten zijn, kom je vaak driehoeken tegen. Een driehoek is namelijk niet te vervormen. Daarom kan een betrekkelijk lichte bouwkraan toch zware lasten tillen.

Je kunt een **driehoek construeren met passer en godriehoek** als de drie zijden zijn gegeven. Dat heb je al eerder gezien.

Maar bekijk de constructie van $\triangle ABC$ met twee gegeven zijden: $AB = 6$, $AC = 4$ en $\angle B = 40^\circ$. Nu zijn er twee verschillende driehoeken mogelijk.



Figuur 15



Figuur 16

Opgave 15

Construeer de volgende driehoeken indien mogelijk.

- a $\triangle ABC$: $\angle B$ is een rechte hoek, $AB = 3$ en $BC = 4$.
- b $\triangle ABC$: $AB = 5$, $AC = 5$ en $BC = 5$.
- c $\triangle DEF$ met $DE = 5$ cm, $EF = 3$ cm en $DF = 1$ cm.
- d $\triangle KLM$ met $KL = 3$ cm en twee hoeken van 40° .

Opgave 16: Lijnen in driehoeken

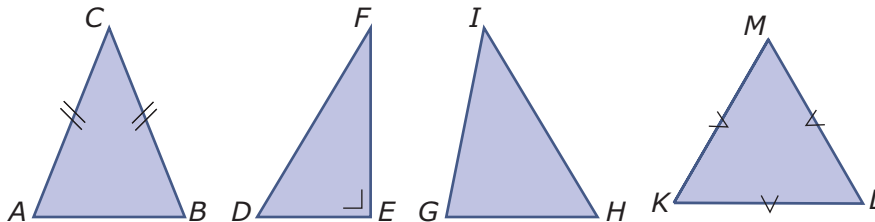
Symmetrische driehoeken hebben symmetrieassen. Die symmetrieassen delen dan één of meerdere hoeken en één of meerdere zijden doormidden. Maar ook in niet-symmetrische driehoeken kun je lijnen tekenen die hoeken en/of zijden middendoor delen.

- a In welke symmetrische driehoeken delen de symmetrieassen meerdere hoeken en zijden doormidden? En bij welke symmetrische driehoeken is dat niet het geval?
- b Teken een niet-symmetrische driehoek. Teken daarin alle bissectrices van de hoeken. Wat valt je op?
- c Teken een niet-symmetrische driehoek. De lijnen die een hoekpunt verbinden met het midden van de zijde er tegenover heten zwaartelijnen. Teken de drie zwaartelijnen in de driehoek. Wat valt je op?
- d Door het midden van elke zijde van een driehoek en loodrecht op die zijde kun je een lijn trekken. Zo'n lijn heet middelloodlijn van die zijde. Teken in een niet-symmetrische driehoek de drie middelloodlijnen. Gaan alle drie door hetzelfde punt?

Testen

Opgave 17

Je ziet vier driehoeken.

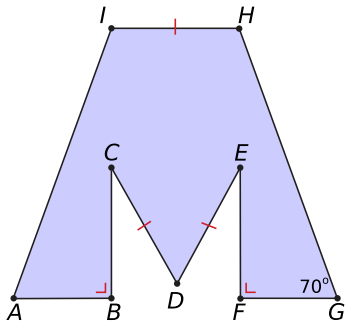


Figuur 17

- a Welke driehoeken zijn gelijkbenig?
- b Welke driehoek is gelijkzijdig?
- c "Elke gelijkbenige driehoek is ook gelijkzijdig." Klopt deze uitspraak? En klopt het omgekeerde?
- d Welke driehoek is rechthoekig?
- e Hoeveel graden zijn de basishoeken van een gelijkbenige rechthoekige driehoek?

Opgave 18

Hier zie je de spiegelsymmetrische figuur $ABCDEFGHI$. Gelijke zijden zijn aangegeven. Punt C ligt op de denkbeeldige lijn BI . Geef de grootte van $\angle A$, $\angle D$ en $\angle H$.



Figuur 18



© 2021

Deze paragraaf is een onderdeel van het Math4All wiskundemateriaal.

Math4All stelt het op prijs als onvolkomenheden in het materiaal worden gemeld en ideeën voor verbeteringen in de content of dienstverlening kenbaar worden gemaakt.

Email: f.spijkers@math4all.nl

Met de Math4All maatwerkdienst kunnen complete readers worden samengesteld en toetsen worden gegenereerd. Docenten kunnen bij a.f.otten@xs4all.nl een gratis inlog voor de maatwerkdienst aanvragen.
