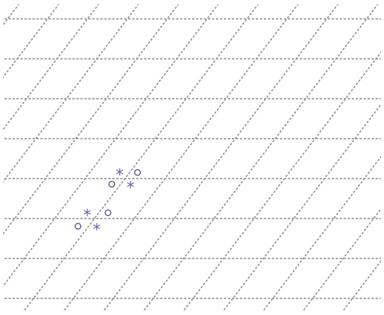
3.4 Gelijke hoeken

Inleiding

Hoeken kunnen even groot zijn, ook al zijn hun benen dat niet. Ze hebben dan hetzelfde aantal graden. Maar hoe herken je in een figuur of hoeken gelijk zijn? Een belangrijk gegeven is de evenwijdigheid van bepaalde lijnen.



Figuur 1

Je leert in dit onderwerp

- een deellijn van een hoek tekenen;
- gelijke (even grote) hoeken herkennen met behulp van X-, F- en/of Z-hoeken.

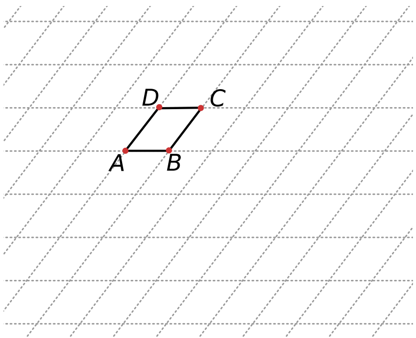
Voorkennis

- de begrippen hoek, hoekpunt, benen, graden, grootte van een hoek;
- aangeven of een hoek recht, stomp, scherp, gestrekt, of overstrekt is en hoeveel graden daarbij hoort;
- hoeken meten en een hoek tekenen als het aantal graden is gegeven;
- de namen van vlakke figuren en ze tekenen als er hoeken en lengtes zijn gegeven.

Verkennen

Opgave V1

Hier en op het **werkblad** zie je een rooster dat bestaat uit twee groepen evenwijdige lijnen. Er is een vierhoekje $ABCD$ op getekend.



Figuur 2

a Hoeveel echt verschillende hoeken maken de roosterlijnen met elkaar?

b Wat voor soort vierhoek is $ABCD$?

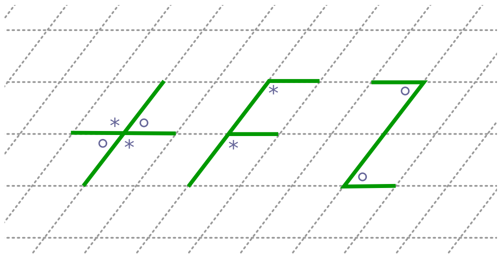
c In punt A snijden twee roosterlijnen elkaar. Geef met een rondje en een sterretje aan welke hoeken rond dit punt aan elkaar gelijk zijn.

d Teken op de roosterlijnen een F en een Z en geef daarin met behulp van een rondje of een sterretje de gelijke hoeken aan.

Uitleg

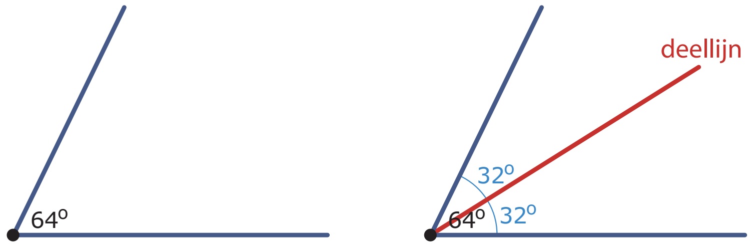
Soms zijn hoeken gelijk, maar waar herken je dat aan?
In de figuur zie je dat bij snijdende lijnen en bij evenwijdige lijnen die worden gesneden door een derde lijn gelijke hoeken ontstaan:

- bij snijdende lijnen zijn de overstaande hoeken gelijk, je kunt van X-hoeken spreken;
- bij evenwijdige lijnen zijn F-hoeken en Z-hoeken gelijk.



Figuur 3

De lijn die een hoek in twee gelijke hoeken verdeelt, heet de deellijn of bissectrice van die hoek. Om de bissectrice van een hoek van 64° te tekenen, halveer je het aantal graden: $\frac{64°}{2} = 32°$.

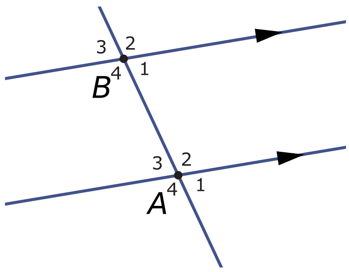


Figuur 4

Hoeken die gelijk zijn aan elkaar, geef je aan door er hetzelfde tekentje (een boogje, een rondje, een sterretje) in te zetten.

Opgave 1

Hier zie je twee evenwijdige lijnen die door een derde lijn worden gesneden. De hoeken die voorkomen zijn bijvoorbeeld $\angle A_1$, $\angle A_2$, etc.



Figuur 5

a Welke hoek is de overstaande hoek van $\angle A_1$? Ofwel: welke hoek vormt een X-hoek met $\angle A_1$?

b Welke hoek vormt een F-hoek met $\angle A_1$ (en is dus even groot)?

c Welke hoek vormt een Z-hoek met $\angle A_3$ (en is dus even groot)?

d Welke hoek vormt een Z-hoek met $\angle A_2$ (en is dus even groot)?

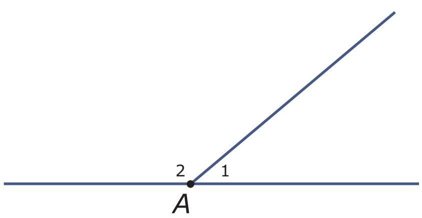
Neem aan dat $\angle A_1 = 70°$.

e Hoe groot is $\angle A_2$? Licht je antwoord toe.

f Hoe groot is $\angle B_3$? Licht je antwoord toe.

Opgave 2

Hier en op het **werkblad** zie je $\angle A_1$ en $\angle A_2$ die samen een gestrekte $\angle A$ vormen.



Figuur 6

a Teken de deellijn van $\angle A_1$.

b Hoe groot is $\angle A_2$?

c Teken de deellijn van $\angle A_2$.

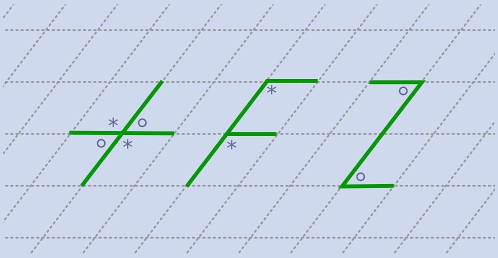
d Welke hoek maken de twee getekende deellijnen met elkaar? Is het nodig om die hoek op te meten?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Gelijke hoeken hebben dezelfde grootte, dus hetzelfde aantal graden.
Vooral bij snijdende lijnen en bij evenwijdige lijnen die worden gesneden door een derde lijn kom je ze veel tegen:

- Bij snijdende lijnen zijn de **overstaande hoeken** of **X-hoeken** gelijk.
- Bij evenwijdige lijnen zijn de **F-hoeken** en de **Z-hoeken** gelijk.



Figuur 7

De lijn die een hoek in twee gelijke hoeken verdeelt, heet de **deellijn** of **bissectrice** van die hoek. Een deellijn van een hoek teken je door het aantal graden van de hoek door twee te delen. Soms moet je dat aantal graden eerst nog meten.

Voorbeeld 1

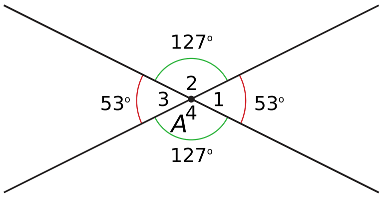
Bekijk de applet: overstaande hoeken

Hier zie je twee snijdende lijnen met de hoeken $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$ en $\angle A_4$.

Er geldt:

- $\angle A_1$ en $\angle A_2$ zijn samen 180°.
  Dus $\angle A_2 = 180° - \angle A_1$.
- $\angle A_3$ en $\angle A_2$ zijn samen 180°.
  Dus $\angle A_3 = 180° - \angle A_1$.

Hieruit volgt dat de overstaande hoeken $\angle A_3$ en $\angle A_1$ altijd gelijk zijn, hoe groot $\angle A_1$ ook is.
Overstaande hoeken zijn altijd gelijk aan elkaar.



Figuur 8

Opgave 3

Bekijk de applet in **Voorbeeld 1**.

Je kunt $\angle A_1$ aanpassen door in de applet de rode punten te verplaatsen. Stel $\angle A_1$ in op 37°.

a Hoe groot is $\angle A_2$.

b Laat zien, dat $\angle A_3 = \angle A_1$.

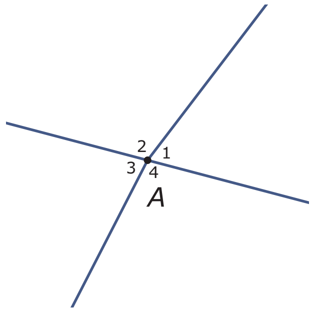
c Leg ook uit waarom $\angle A_4 = \angle A_2$.

Opgave 4

Bekijk de figuur met één lijn en twee halve lijnen.

a Waarom is nu $\angle A_1 \neq \angle A_3$?

b Stel je voor dat $\angle A_1 = 56°$. Van welke hoek weet je dan ook de grootte? Hoe groot is die hoek?

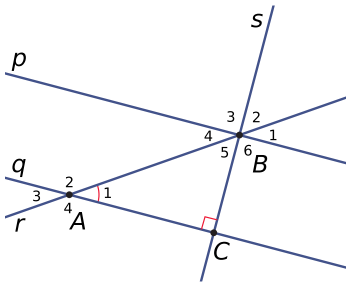


Figuur 9

Voorbeeld 2

In deze figuur zijn de lijnen p en q evenwijdig. Verder is $\angle A_1 = 34°$.

Bereken alle andere hoeken in deze figuur.



Figuur 10

Antwoord

Kijk goed welke hoeken gelijk zijn, omdat het overstaande hoeken (X-hoeken), F-hoeken of Z-hoeken zijn. Bekijk ook goed welke hoeken samen 180° of 90° zijn.

$\angle A_2 = \angle A_4 = 180° - \angle A_1 = 180° - 34° = 146°$.
$\angle A_3 = \angle A_1 = 34°$ (X-hoeken).
$\angle B_2 = \angle B_5 = 90° - \angle A_1 = 90° - 34° = 56°$.
$\angle B_4 = \angle B_1 = 34°$ (Z-hoeken en X-hoeken vanaf $\angle A_1$).
$\angle B_6 = \angle B_3 = 90°$ (Z-hoeken).

Opgave 5

Bekijk de figuur in **Voorbeeld 2**.

a Waarom is $\angle B_6 = 90°$?

b Waarom is $\angle B_2 = 90° - \angle A_1$?

c Waarom is $\angle B_5 = \angle B_2$?

Opgave 6

Bekijk de figuur. De lijnen l en m zijn evenwijdig, evenals de lijnen k en q.

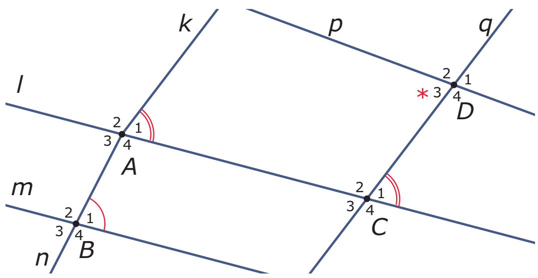
a Waarom is $\angle A_1 \neq \angle B_1$?

b Waarom is $\angle A_1 = \angle C_1$?

c Waarom is $\angle C_1 \neq \angle D_3$?

d Welke hoek is ook gelijk aan $\angle A_1$ en waarom?

e Stel dat $\angle A_1 = 60°$. Van welke hoeken weet je nu ook hoe groot ze zijn? Schrijf ze allemaal op.



Figuur 11

Voorbeeld 3

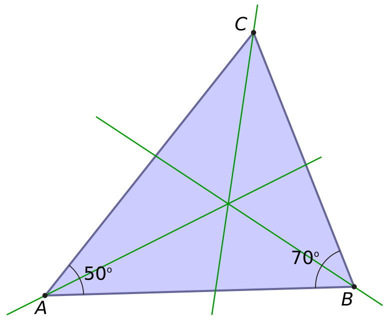
Gegeven is ΔABC met $AB = 6$ cm, $\angle A = 50°$ en $\angle B = 70°$.

Teken deze driehoek met alle bissectrices van de hoeken.

Antwoord

Teken eerst lijnstuk AB met daarop de hoeken $\angle A$ en $\angle B$. Je kunt dan driehoek ABC afmaken.

Vervolgens teken je de deellijnen door de hoeken in tweeën te delen. Daarvoor moet je de grootte van $\angle C$ zelf opmeten.



Figuur 12

Opgave 7

Gegeven is ΔABC in **Voorbeeld 3**.

a Teken zelf ΔABC.

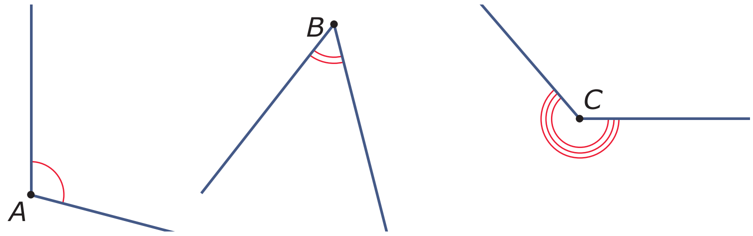
b Teken de deellijnen van $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$.

c Wat valt op aan de drie bissectrices?

Verwerken

Opgave 8

Teken in elke hoek op het **werkblad** de deellijn.



Figuur 13

Opgave 9

Teken de hoeken en teken er een deellijn in.

a $\angle A = 104°$

b $\angle B = 36°$

c $\angle C = 75°$

d $\angle D = 260°$

Opgave 10

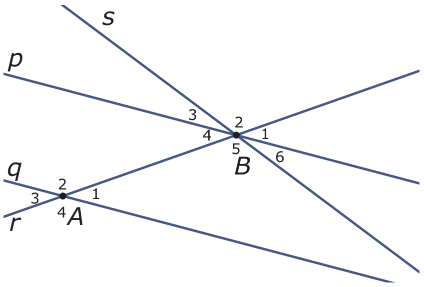
Teken ΔABC met $\angle A = 50°$, $AB = 6$ cm en $AC = 4$ cm.

a Laat zien dat de bissectrices van de hoeken van deze driehoek door één punt S gaan.

b Om punt S zitten zes hoeken. Geef met gelijke tekentjes aan welke van die hoeken gelijk zijn.

Opgave 11

Bereken in de figuur alle hoeken. Gegeven is dat de lijnen p en q evenwijdig zijn, dat $\angle A_1 = 40°$ en dat $\angle B_6 = 30°$.



Figuur 14

Opgave 12

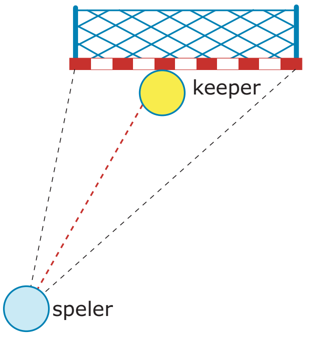
Gegeven is een parallellogram $ABCD$ met $AB = 6$ cm en $AD = 4$ cm. Verder is $\angle BAD = 50°$.

a Teken dit parallellogram.

b Leg uit hoe je de andere hoeken van dit parallellogram kunt berekenen.

Toepassen

Als bij een handbalwedstrijd de keeper een speler op zich af ziet komen om te scoren, kan hij het beste uitlopen langs de deellijn van de hoek waaronder de speler het doel ziet.
Hier zie je een bovenaanzicht van de situatie.



Figuur 15

Opgave 13: Doelman

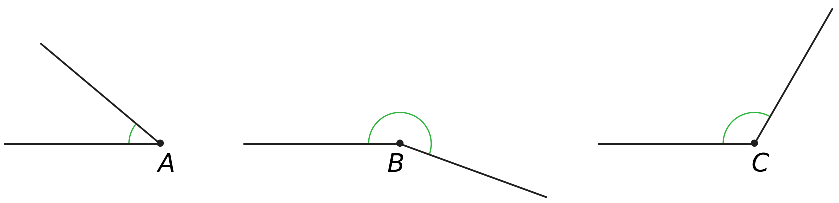
Het uitlopen van de doelman op een doorgebroken speler die op doel wil schieten is een mooi voorbeeld van het toepassen van een deellijn.

Bij een voetbalwedstrijd heeft een speler vanaf de punt van het strafschopgebied een vrije schietkans op doel. De keeper komt uit zijn doel om het scoren te bemoeilijken.
Hoe moet hij uitlopen? In de Wikipedia: voetbalveld vind je de afmetingen van een voetbalveld.

Testen

Opgave 14

Teken de drie hoeken na en teken in elke hoek de deellijn.



Figuur 16

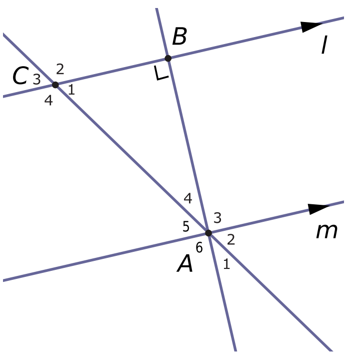
Opgave 15

De lijnen l en m in de figuur zijn evenwijdig. Lijn AB snijdt de lijnen l en m onder een rechte hoek. Verder is $\angle C_1 = 71°$.

a Hoe groot is $\angle C_4$?

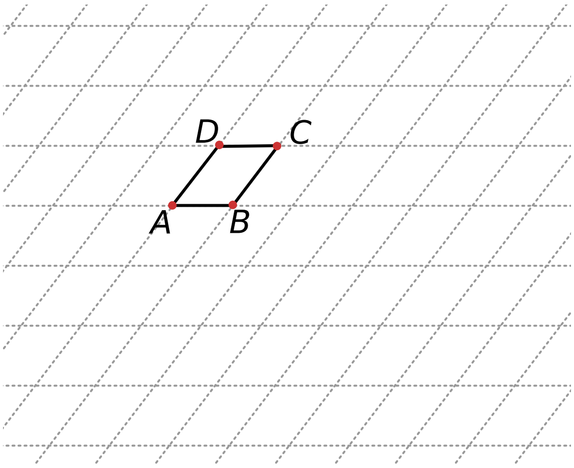
b Hoe groot is $\angle A_1$?

c Hoe groot is $\angle A_4$?

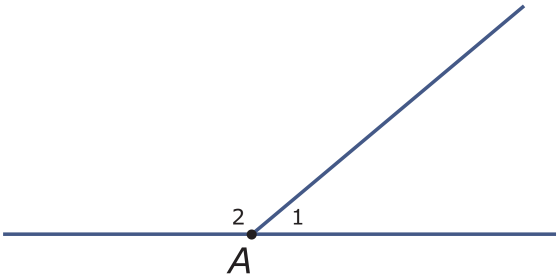


Figuur 17

Werkblad bij Opgave V1 op pagina 1



Werkblad bij Opgave 2 op pagina 2.



Werkblad bij **Opgave 8 op pagina 6.**